Matemática básica para Economía

ONLINE

Adrián Aguinaga R.
Lorena Balseca C.
Lucía Castro G.
Simón Cedeño M.
Julio Galárraga C.
Nury Ortiz M.
Santiago Quinga S.
Adriana Tapia Y.
Janeth Velasco V.

Revisión Técnica:
Editorial CEDIA

Corrección de Estilo:
Editorial CEDIA

Diseño y diagramación:
Paz Cordero González

Coordinación:
Laura Malache S. - Editorial CEDIA

Una publicación de la Editorial CEDIA,
arbitrada por pares académicos de doble ciego.

CEDIA

Gonzalo Cordero 2-111 y
J. Fajardo
Cuenca – Ecuador
cedia.edu.ec

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
Av. Gral. Rumiñahui S/N, Sangolquí 171103
Sangolquí- Ecuador
espe.edu.ec

Primera edición
ISBN:978-9942-7178-6-3

Sangolquí, Ecuador
Septiembre de 2024

Matemática básica para Economía online

Adrián Aguinaga R.
Lorena Balseca C.
Lucia Castro G.
Simón Cedeño M.
Julio Galárraga C.
Nury Ortiz M.
Santiago Quinga S.
Adriana Tapia Y.
Janeth Velasco V.

PRESENTACIÓN

Uno de los retos más complejos, tanto para los docentes como para los estudiantes en la modalidad en línea, es el aprendizaje significativo de temas que sirven como base para desarrollar competencias duras en las carreras en las que se implica el uso de ciencias exactas. De allí surge la necesidad de dotar a unos y a otros de material para la clase que refuerce estos aprendizajes y familiarice al estudiante con las líneas de pensamiento que le permitan avanzar en su carrera con un perfil sólido en esta rama específica del conocimiento.

Ante esta necesidad, un equipo de docentes de la modalidad en línea de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE pone en consideración de los colegas y estudiantes este trabajo. Este se ha pensado como un apoyo eficaz en el fortalecimiento de las destrezas matemáticas básicas del estudiante virtual de la carrera de Economía. Este texto se centra en presentar un banco representativo de ejercicios resueltos con su proceso detallado de resolución. Con ello se procura introducir al futuro profesional en la comprensión y entendimiento de modelos económicos que usará a lo largo de su carrera y con los que debe familiarizarse desde el inicio, para que pueda analizarlos y resolverlos con eficiencia.

Los diez capítulos que forman el texto corresponden a las Capítulos que se trabajan a lo largo del primer semestre de estudios de la materia Matemática Básica en la modalidad en línea de la carrera de Economía de la

Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE: lógica matemática, conjuntos, números reales, polinomios, fracciones algebraicas, ecuaciones y sistemas de ecuaciones de primer grado, ecuaciones de segundo grado y no lineales, inecuaciones de primer prado, inecuaciones de segundo grado, números racionales e irracionales y función valor absoluto.

Cada capítulo se divide en lecciones que abarcan los temas relevantes de cada campo y cuyo fundamento teórico es presentado de forma somera. Se prioriza el planteamiento de ejercicios resueltos y de ejercicios propuestos para que el estudiante encuentre en ellos una guía confiable para orientar la comprensión de los temas, así como su trabajo autónomo posterior.

El objetivo de este texto es contribuir con el mejoramiento académico de los estudiantes a los que está dirigido y se pretende implementar su uso en la dinámica del trabajo en el aula virtual, para ofrecer mejores condiciones de aprendizaje a los estudiantes de esta modalidad. Como todo trabajo humano, es perfectible y confiamos en que, con el tiempo y los comentarios de colegas y estudiantes, se pueda hacerlo más útil en el futuro.

LOS AUTORES

LOS AUTORES

Adrián Aguinaga Romero, Capítulo VI

Master en docencia Matemática Universitaria (UCE), doctor en Contabilidad y Auditoría (UCE), docente de Ciencias Exactas Universidad de las Fuerzas Armadas (ESPE).

Lorena Vanessa Balseca Campaña, Capítulo I

Máster en Ingeniería Matemática y Computación (UNIR), Ingeniera en Mecatrónica (ESPE), Docente de Ciencias Exactas de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE.

Lucía Eudocia Castro Gordón, Capítulo VII

Maestría en la Enseñanza de Matemática (ESPE), doctora en Investigación y Administración Educativa. Licenciada en Matemática y Física. Docente de Cálculo Diferencial e Integral en Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE. Docente de Didáctica de la Matemática en UNIR.

Simón Adrián Cedeño Mendoza, Capítulo IX

Ingeniero en Electrónica y Redes de Información (EPN), maestría en Ingeniería Matemática y Computación (UNIR), Docente de Matemática de la Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE.

Julio César Galárraga Calero, Capítulos III y IV

Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones (EPN), maestría en Enseñanza de la Matemática (ESPE), Docente de Matemática de la Universidad de las Fuerzas Armadas (ESPE).

Nury Gabriela Ortiz Moya, Capítulo V

Ingeniera en Mecatrónica (ESPE), master Universitario en Ingeniería Matemática y Computación (UNIR), Docente Departamento de Ciencias Exactas (ESPE)

Santiago David Quinga Socasi, Capítulo II

Ingeniero en Electrónica y Control (EPN), magister en Eficiencia Energética (EPN), Master Universitario en Ingeniería Matemática y Computación (UNIR), Docente del Departamento de Ciencias Exactas (ESPE)

Adriana Elizabeth Tapia Yacelga, Capítulo VIII

Ingeniera en Electrónica e Instrumentación (ESPE), maestría en Enseñanza de la Matemática (ESPE), Docente de Matemática y Estadística de la Universidad de las Fuerzas Armadas (ESPE).

Janeth Alexandra Velasco Velasco, Capítulo X

Ingeniera Matemática (UCE), maestría en Matemáticas Puras y Aplicadas (UCE), docente de Matemáticas de la Universidad de las Fuerzas Armadas (ESPE).

Capítulo 01

Lógica Matemática

Figura 1.
Representación del razonamiento lógico.

Persona tomando decisiones en función de proposiciones lógicas. Tomado de Freepik 2024, https://n9.cl/gqw30.

La lógica matemática se centra en el estudio de los principios del razonamiento, utilizando un enfoque formal y sistemático. Establece reglas y estructuras que permiten analizar y validar argumentos. Basa su estudio en proposiciones, afirmaciones que pueden ser verdaderas o falsas, mediante el uso del cálculo proposicional y la inferencia lógica Además, permite realizar análisis y tomar decisiones, modelando situaciones complejas y optimizando recursos y procesos, por ejemplo, al comprender mejor el comportamiento de los agentes económicos en los mercados.

¿En qué aspecto de tu vida cotidiana crees que puedes utilizar la lógica matemática para tomar decisiones?

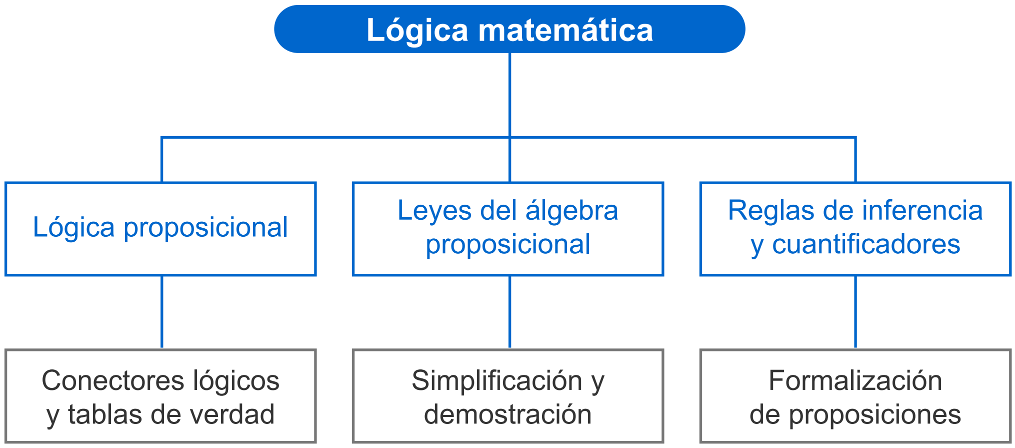
Objetivos de unidad

1. Comprender los principios fundamentales de la lógica proposicional, mediante el uso de reglas y técnicas de la lógica proposicional, para el análisis y evaluación de la validez de argumentos.

2. Dominar la lógica de predicados y la cuantificación, planteando problemas de inferencias válidas utilizando reglas de cuantificación, para la expresión y análisis de afirmaciones complejas.

3. Estudiar las estructuras formales del cálculo proposicional, incluyendo la sintaxis y la semántica de los lenguajes formales, mediante la aplicación de conectivos lógicos y cuantificadores, así como las técnicas de demostración e inferencia, para el planteamiento y correcta resolución de problemas de lógica matemática.

Figura 2.
Temas a trabajar



Tema 1
Proposiciones, conectivos lógicos y tablas de verdad

La lógica matemática se centra en analizar cómo las afirmaciones o proposiciones se relacionan entre sí y cómo estas relaciones se pueden representar y manipular de manera sistemática. Se basa en un conjunto de estructuras y reglas formales que permiten deducir nuevas afirmaciones a partir de premisas anteriormente establecidas. La lógica proporciona reglas y técnicas para determinar si es o no válido un argumento dado. El razonamiento lógico se emplea en matemáticas para demostrar teoremas; sin embargo, se usa en forma constante para realizar cualquier actividad en la vida.

Proposiciones:

También conocidos como enunciados, son oraciones que pueden ser verdaderas o falsas, pero no ambas a la vez. Son evaluadas según el contexto y la realidad.

- “3 + 2 = 5.” Verdadero.
- “El monto siempre es igual al capital.” Falso.
- “¡Hola!” No es una proposición.

Conectores lógicos:

También conocidos como operadores lógicos, son símbolos o palabras utilizados para combinar o modificar proposiciones simples y formar proposiciones compuestas.

Analizaremos los siguientes conectores lógicos:

Negación (¬):

p	$\neg p$
V	F

Conjunción (∧): se lee "p y q"

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción (∨): se lee "p o q"

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disyunción exclusiva (⊻): se lee "p ó q"

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conjunción negativa (↓): se lee "ni p ni q"

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Implicación (→): se lee "si p, entonces q"

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional (↔): se lee "p si y solo si q"

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla de verdad:

Es una representación sistemática de todas las posibles combinaciones de valores de verdad para una proposición simple o compuesta.

Para hallar el número de filas se utiliza 2^n, siendo n el número de proposiciones simples.Si el resultado de la tabla de verdad es Verdadero, independientemente de las proposiciones simples, entonces la expresión es una **tautología**. Si toda la tabla es falsa se conoce como **contradicción**. En el caso contrario, se trata como **contingencia** o indeterminada.

Pasos para realizar una tabla de verdad:

1. Colocar los valores de verdad de las proposiciones simples.
2. Colocar los valores de verdad de las proposiciones compuestas internas.
3. Colocar los valores de las proposiciones compuestas externas.

Si tenemos 2 proposiciones simples p y q,
la tabla de verdad tendrá $2^2 = 4$ filas.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$
V	V
V	F
F	V
F	F

Si tenemos 3 proposiciones simples p, q y r,
la tabla de verdad tendrá $2^3 = 8$ filas.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	F	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Siguiendo la misma estructura llenaremos las filas dependiendo del número de proposiciones, teniendo en consideración que la primera proposición se llenara la mitad de las primeras filas con verdadero y luego falso.

Ejercicios resueltos

1. Determina los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

a. $-9 > 3$ (F)

b. $x^2 \geq 0$ (V)

c. La inflación reduce el poder adquisitivo. (V)

d. ¿Cuál es la tasa de interés anual? $(no\ es\ proposición)$

e. Los precios siempre suben en una economía de mercado. (F)

2. Resuelve las siguientes tablas de verdad y determina si es tautología, contradicción o contingencia.

a. $(\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}) \veebar \boldsymbol{r}$

Tenemos 3 proposiciones simples por lo cual el número de filas es $2^3 = 8$.

(1) Colocamos los valores de verdad de cada una de las proposiciones simples.
(2) Colocamos los valores de las proposiciones compuestas internas.
(3) Colocamos los valores de verdad de las proposiciones compuestas externas.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$	$(\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}) \veebar \boldsymbol{r}$
V	V	V	V	F
V	V	F	V	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	V
F	V	F	F	F
F	F	V	V	F
F	F	F	V	V
(1)	(1)	(1)	(2)	(3)

$Es\ una\ contingencia.$

b. $(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \leftrightarrow [\boldsymbol{p} \leftrightarrow (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})]$

Tenemos 3 proposiciones simples por lo cual el número de filas es $2^2 = 4$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \leftrightarrow (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$	$(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \leftrightarrow [\boldsymbol{p} \leftrightarrow (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})]$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V

$Es\ una\ tautología$

c. $[(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r})] \rightarrow (\boldsymbol{p} \veebar \boldsymbol{r})$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r}$	$[(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r})]$	$(\boldsymbol{p} \veebar \boldsymbol{r})$	$[(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r})] \rightarrow (\boldsymbol{p} \veebar \boldsymbol{r})$
V	V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F	F

Es una contingencia

d. $[(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r})] \wedge \neg(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{r})$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r}$	$[(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r})]$	$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{r}$	$\neg(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{r})$	$[(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r})] \wedge \neg(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{r})$
V	V	V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	F	F	V	F
V	F	V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V	F	F

Es una contradicción

Ejercicios propuestos

1. Determina los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

- **a.** Los aranceles altos siempre protegen a la industria nacional.
- **b.** La oferta y la demanda están relacionados.
- **c.** La reducción de impuestos implica alza del salario básico.
- **d.** ¿Qué es el precio de un bien?
- **e.** La demanda es la cantidad de bienes o servicios que las personas están dispuestas a comprar a diferentes precios.

2. Resuelve las siguientes tablas de verdad y determina si es tautología, contradicción o contingencia:

- **a.** $[(\neg p \to q) \wedge (q \to r)] \wedge (\neg r \wedge r)$
- **b.** $[(p \vee q) \to r] \to (p \vee \neg p)$
- **c.** $[(\neg p \wedge q) \to (r \wedge \neg r)] \wedge \neg q$
- **d.** $[\neg(p \vee q)] \to (\neg r \vee \neg q)$
- **e.** $[(p \vee q) \downarrow r] \wedge r$

Respuestas en la página 228

Tema 2
Leyes del álgebra de proposiciones

Equivalencia e implicación lógica

Equivalencia:

Es la base para las leyes lógicas. Cuando la proposición $P \leftrightarrow Q$ representa una tautología, se dice que la proposición P es equivalente a Q y se representa $P \equiv Q$.

Implicación:
Es la base para las reglas de inferencia. Cuando la proposición $P \rightarrow Q$ representa una tautología, se dice que la P implica Q, Q se concluye de P o Q se deduce de P.

Leyes lógicas:

Son el conjunto de reglas y principios que rigen la manipulación y simplificación de expresiones lógicas construidas a partir de proposiciones simples y compuestas.

Las leyes fundamentales del álgebra de proposiciones incluyen a las siguientes:

Leyes de doble negación:

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

Leyes de complemento:

$$p \wedge \neg p \equiv \mathbb{F}$$
$$p \vee \neg p \equiv \mathbb{V}$$

Leyes de idempotencia:

$$p \wedge p \equiv p$$
$$p \vee p \equiv p$$

Leyes de asociación:

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$
$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$
$$(p \veebar q) \veebar r \equiv p \veebar (q \veebar r)$$
$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$$

Leyes de absorción:

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$
$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

Leyes de Morgan:

$$\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$
$$\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

Otras:

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p \equiv (p \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$$
$$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$
$$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$$
$$p \veebar q \equiv \neg (p \leftrightarrow q)$$
$$\neg (p \downarrow q) \equiv p \vee q$$

Leyes de identidad:

$$p \wedge \mathbb{V} \equiv p$$
$$p \wedge \mathbb{F} \equiv \mathbb{F}$$
$$p \vee \mathbb{V} \equiv \mathbb{V}$$
$$p \vee \mathbb{F} \equiv p$$

Leyes conmutativas:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$
$$p \vee q \equiv q \vee p$$
$$p \veebar q \equiv q \veebar p$$
$$p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$$

Leyes de distribución:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Otras:

$$\neg (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$
$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$
$$p \downarrow q \equiv \neg p \wedge \neg q$$
$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$
$$p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$$

Principio de sustitución:

Las proposiciones pueden ser sustituidas por sus equivalentes. Este principio se utiliza para demostrar equivalencias o simplificar proposiciones compuestas.

Se puede realizar:

1. Partiendo del lado derecho para llegar al izquierdo.
2. Partiendo del lado izquierdo para llegar al derecho.
3. Realizar los 2 lados hasta llegar a la misma proposición.

Ejercicios resueltos

1. Demuestre las siguientes equivalencias:

   a. $[(\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{q}) \to \boldsymbol{r}] \to \boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{r} \to \boldsymbol{p}$

   En cada paso indicaremos las leyes utilizadas

   $[(p \to q) \to r] \to p \equiv r \to p$

   $[(\neg p \vee q) \to r] \to p \equiv \neg r \vee p$ $\quad$ *condicional*

   $[\neg(\neg p \vee q) \vee r] \to p \equiv \neg r \vee p$ $\quad$ *condicional*

   $\neg[(\neg p \vee q) \wedge \neg r] \to p \equiv \neg r \vee p$ $\quad$ *Morgan*

   $[(\neg p \vee q) \wedge \neg r] \vee p \equiv \neg r \vee p$ $\quad$ *condicional*

   $[(\neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r)] \vee p \equiv \neg r \vee p$ $\quad$ *distributiva*

   $[(\neg p \wedge \neg r) \vee p] \vee (q \wedge \neg r) \equiv \neg r \vee p$ *asociativa*

   $[(\neg p \vee p) \wedge (\neg r \vee p)] \vee (q \wedge \neg r) \equiv \neg r \vee p$ *distributiva*

   $[\mathbb{V} \wedge (\neg r \vee p)] \vee (q \wedge \neg r) \equiv \neg r \vee p$ *complemento*

   $(\neg r \vee p) \vee (q \wedge \neg r) \equiv \neg r \vee p$ $\quad$ *identidad*

   $((\neg r \vee p) \vee q) \wedge ((\neg r \vee p) \vee \neg r) \equiv \neg r \vee p$ *distributiva*

   $((\neg r \vee p) \vee q) \wedge ((\neg r \vee \neg r) \vee p) \equiv \neg r \vee p$ *asociativa*

   $((\neg r \vee p) \vee q) \wedge (\neg r \vee p) \equiv \neg r \vee p$ *idempotencia*

   $(\neg r \vee p) \equiv \neg r \vee p$ *absorción*

Interdisciplinariedad

Vamos a aplicar el uso de leyes lógicas en situaciones de la vida cotidiana.

Ingresa al siguiente link y halla las conclusiones de las premisas descritas.

https://tinyurl.com/23mq4h9j

b. $[(\boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \vee (\boldsymbol{r} \wedge \neg \boldsymbol{r}))] \equiv \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$

$[(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \mathbb{F})] \equiv p \wedge q \quad complemento$

$[(p \vee \neg q) \wedge q] \equiv p \wedge q \quad identidad$

$[(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge q)] \equiv p \wedge q \ distributiva$

$[(p \wedge q) \vee \mathbb{F}] \equiv p \wedge q \ complemento$

$p \wedge q \equiv p \wedge q \ identidad$

c. Dadas las premisas:

- Si los bancos incrementan la tasa de interés, entonces, aumenta el número de ahorristas.
- Si hay déficit de efectivo, no aumenta el número de ahorristas.
- Finalmente, los bancos incrementan la tasa de interés.

1. Demostrar qué aumenta el número de ahorristas

$P1 = q \to r$

$P2 = p \to \neg r$

$P3 = q$

$conclusión = r$

$[(p \to \neg r) \wedge (q \to r) \wedge q] \to r \equiv \mathbb{V}$

$\neg[(\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge q] \vee r \equiv \mathbb{V} \quad condicional$

$[\neg(\neg p \vee \neg r) \vee \neg(\neg q \vee r) \vee \neg q] \vee r \equiv \mathbb{V} \quad Morgan$

$[(p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg q] \vee r \equiv \mathbb{V} \quad Morgan$

$[(p \wedge r) \vee r] \vee [(q \wedge \neg r) \vee \neg q] \equiv \mathbb{V} \quad asociativa$

$r \vee [(q \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg q)] \equiv \mathbb{V} \quad absorción, distributiva$

$r \vee [\mathbb{V} \wedge (\neg r \vee \neg q)] \equiv \mathbb{V} \quad complemento$

$r \vee (\neg r \vee \neg q) \equiv \mathbb{V}$ *identidad*

$(r \vee \neg r) \vee \neg q \equiv \mathbb{V}$ *asociativa*

$\mathbb{V} \vee \neg q \equiv \mathbb{V}$ *complemento*

$\mathbb{V} \equiv \mathbb{V}$ *identidad*

2. Simplifique las siguientes expresiones:

a. $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \rightarrow [(\neg \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge (\neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{q})]$

$\neg(p \wedge q) \vee [(\neg p \vee q) \wedge \mathbb{V}]$ *complemento*

$(\neg p \vee \neg q) \vee [(\neg p \vee q)]$ *Morgan, identidad*

$(\neg p \vee \neg p) \vee (\neg q \vee q)$ *asociativa*

$\neg p \vee (\mathbb{V})$ *idempotencia, complemento*

$\mathbb{V}$ *identidad*

b. $[\neg(\neg \boldsymbol{p} \veebar \boldsymbol{q}) \wedge \neg(\boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q})] \vee (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$

$[\neg(\neg p \veebar q) \wedge \neg(p \vee \neg q)] \vee (p \vee q)$

$[\neg[(\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)] \wedge (\neg p \wedge q)] \vee (p \vee q)$ *Disy. exclusiva, Morgan*

$[[\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)] \wedge (\neg p \wedge q)] \vee (p \vee q)$ *Morgan*

$[[(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)] \wedge (\neg p \wedge q)] \vee (p \vee q)$ *Morgan*

$(\neg p \wedge q) \vee (p \vee q)$ *absorción*

$[\neg p \vee (p \vee q)] \wedge [q \vee (p \vee q)]$ *distribución*

$[q \vee (p \vee \neg p)] \wedge [p \vee (q \vee q)]$ *asociativa*

$[q \vee \mathbb{V}] \wedge [p \vee q]$ *complemento, idempotencia*

$\mathbb{V} \wedge [p \vee q]$ *identidad*

$p \vee q$ *identidad*

Ciudadanía digital

Ingresa a ChatGPT y coloca el este código para resolver las siguientes proposiciones:

Dadas las proposiciones
1. \(p \): La inflación aumenta.
2. \(q \): El poder adquisitivo del dinero disminuye.
3. \(r \): El consumo de bienes y servicios se reduce.

Se tienen las siguientes premisas:
1. \(p \rightarrow q \)
2. \(q \rightarrow r \)

Halla la conclusión si ocurre \(p \).

Ejercicios propuestos

1. Demuestre las siguientes equivalencias:

- **a.** $[\boldsymbol{p} \vee (\neg \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{q})] \leftrightarrow \boldsymbol{p} \equiv \mathbb{V}$
- **b.** $[\neg(\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}) \rightarrow \neg \boldsymbol{q}] \vee \boldsymbol{q} \equiv \mathbb{V}$
- **c.** $[(\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p}) \downarrow \boldsymbol{p}] \equiv \neg(\neg \boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q})$
- **d.** $[[\boldsymbol{q} \wedge (\boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{p})] \leftrightarrow \neg \boldsymbol{q}] \equiv \mathbb{F}$
- **e.** $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \rightarrow [(\boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \vee \neg \boldsymbol{p})] \equiv \mathbb{V}$

2. Simplifique las siguientes expresiones:

- **a.** $\boldsymbol{p} \leftrightarrow [(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{p})]$
- **b.** $[(\neg \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \rightarrow (\boldsymbol{q} \wedge \neg \boldsymbol{q})] \neg \boldsymbol{q}$
- **c.** $\boldsymbol{p} \leftrightarrow (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$
- **d.** $(\neg \boldsymbol{q} \vee \neg \boldsymbol{p}) \wedge (\neg \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$
- **e.** $(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge (\neg \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$

Respuestas en la página 228

Tema 3
Reglas de inferencia y cuantificadores

Inferencia: establece una relación entre dos proposiciones, donde una implica la otra, estas son verdaderas solo si se cumple las siguientes conclusiones.

- Las premisas deben ser verdaderas.
- Las premisas deben relacionarse sujetas a las leyes lógicas

Reglas de inferencia:

Se basan en la implicación lógica. Permiten derivar nuevas proposiciones a partir de proposiciones existentes. Estas reglas ayudan a justificar el razonamiento deductivo, en el que se parte de premisas conocidas para llegar a conclusiones válidas.

Las reglas de inferencia incluyen:

Modus ponendo ponens MPP

$$\begin{array}{l} 1.\, p \rightarrow q \\ 2.\, p \\ \hline C = q \end{array}$$

Modus tollendo Tollens MTT

$$\begin{array}{l} 1.\, p \rightarrow q \\ 2.\, \neg q \\ \hline C = \neg p \end{array}$$

Silogismo hipotético SH

$$\begin{array}{l} 1.\, p \rightarrow q \\ 2.\, q \rightarrow r \\ \hline C = p \rightarrow r \end{array}$$

Modus tollendo ponens MTP

$$\begin{array}{l} 1.\, p \vee q \\ 2.\, \neg p \\ \hline C = q \end{array}$$

Doble negación

$$\begin{array}{l} 1.\, \neg(\neg p) \\ \hline C = p \end{array}$$

Silogismo disyuntivo SD

$$\begin{array}{l} 1.\, p \vee q \\ 2.\, p \rightarrow r \\ 3.\, q \rightarrow s \\ \hline C = r \vee s \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1.\, p \vee q \\ 2.\, p \rightarrow r \\ 3.\, q \rightarrow r \\ \hline C = r \end{array}$$

Simplificación

$$\begin{array}{l} 1.\, p \wedge q \\ \hline C = p \end{array}$$

Conjunción

$$\begin{array}{l} 1.\, p \\ 2.\, q \\ \hline C = p \wedge q \end{array}$$

Adición

$$\begin{array}{l} 1.\, p \\ 2.\, q \\ \hline C = p \vee q \end{array}$$

Cuantificadores:

Son símbolos que se utilizan para expresar afirmaciones sobre conjuntos de objetos en términos de “cuántos” elementos satisfacen ciertas condiciones. Los cuantificadores incluyen:

- El cuantificador universal (∀): se lee como “para todo” o “para cada”. Se utiliza para afirmar que una cierta propiedad es verdadera para todos los elementos de un conjunto dado. Para su negación se utiliza (∃).

- El cuantificador existencial (∃) se lee como “existe” o “hay al menos uno”. Se utiliza para afirmar que al menos un elemento de un conjunto dado tiene una cierta propiedad. Para su negación se utiliza (∀).

Ejercicios resueltos

1. Usando reglas de inferencia, valida los siguientes razonamientos.

a. Se tiene las siguientes premisas:

1. $\boldsymbol{p \vee q}$	4. $\neg p$	$MTT\ (2)\ y\ (3)$
2. $\boldsymbol{p \to r}$	5. q	$MTP\ (1)\ y\ (4)$
3. $\boldsymbol{\neg r}$	6. $q \vee t$	$LA\ (5)$
$\boldsymbol{C = q \vee t}$		

2. Si la oferta de viviendas aumenta, entonces el precio de las casas baja. Si el precio de las casas baja, entonces solicitaré un préstamo. Si la oferta de viviendas aumenta, entonces solicitaré un préstamo implica que el precio de las casas baja entonces compraré una casa. Si la oferta de viviendas aumenta, entonces compraré una casa implica que me buscaré un agente inmobiliario. Por tanto, buscaré un agente inmobiliario.

p: *la oferta de viviendas aumenta*
q: *el precio de las casas baja*
r: *solicitaré un préstamo*
s: *compraré una casa*
t: *buscaré un agente inmobiliario*

1. $\boldsymbol{p \to q}$	5. $p \to r$	$S.H\ (1)\ y\ (2)$
2. $\boldsymbol{q \to r}$	6. $q \to s$	$M.P.P\ (3)\ y\ (5)$
3. $\boldsymbol{(p \to r) \to (q \to s)}$	7. $p \to s$	$S.H\ (1)\ y\ (6)$
4. $\boldsymbol{(p \to s) \to t}$	8. t	$M.P.P\ (7) y\ (4)$
$\boldsymbol{C = t}$		

b. Se tiene las siguientes premisas

1. $\boldsymbol{(p \to q) \wedge (r \to s)}$	3. p	*Simplificación* (2)
2. $\boldsymbol{p \wedge r}$	4. r	*Simplificación* (2)
$\boldsymbol{C = q \wedge s}$	5. $p \to q$	*Simplificación* (1)
	6. $r \to s$	*Simplificación* (1)
	7. q	$MPP\ (3)\ y\ (5)$
	8. s	$MPP\ (4)\ y\ (6)$
	9. $q \wedge s$	*Conjunción*(7) *y* (8)

c. Se tiene las siguientes premisas

1. $\boldsymbol{p \rightarrow \neg q}$
2. $\boldsymbol{q \vee r}$
3. $\boldsymbol{r \rightarrow \neg q}$
4. $\boldsymbol{t \rightarrow q}$
5. $\boldsymbol{s}$

$\boldsymbol{C = s \wedge \neg t}$

6. $\neg q \quad Silogismo\ D.(1),(2) y\ (3)$
7. $\neg t \quad MTT\ (6)\ y\ (4)$
8. $s \wedge \neg t\ Conjunción\ (5) y\ (7)$

3. Formalice y niegue las siguientes proposiciones.

a. P: Todos los ciudadanos de Ecuador pagan impuestos y algunos inmigrantes de Colombia reciben bonos.

$$Creamos\ los\ conjuntos\ Ecuador\ y$$
$$Colombia\ para\ determinar\ donde\ existen\ los\ elementos$$

$$E = \{{}^{x}/_{x} \in\ Ecuador\} \qquad U = \left\{{}^{y}/_{y} \in Colombia\right\}$$

$p(x) = pagan\ impuestos$
$q(y) = Reciben\ bonos$
$P = \forall\ x\ \in\ E, \exists\ y\ \in\ U; p(x) \wedge q(y)$
$\neg P = \exists\ x\ \in\ E, \forall\ y\ \in U; \neg[p(x) \wedge q(y)]$

b. R: Todos los números reales son primos y algunos son múltiplos de 2.

$No\ necesitamos\ crear\ los\ conjuntos\ porque\ ya\ existen\ los\ reales\ \mathbb{R}$.

$p(x) = primos$
$q(x) = múltiplos\ de\ dos$
$R = \forall x \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}; p(x) \wedge q(x)$
$\neg R = \exists x \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}; \neg[p(x) \wedge q(x)]$

4. Determine el valor de verdad de la siguiente proposición

a. $\forall\, \boldsymbol{m} \in \mathbb{N};\, \exists\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N};\, \boldsymbol{2n = m}$

$Verdad$

b. $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R};\, \boldsymbol{x^2 \geq 0}$

$Verdad$

c. $\exists\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R};\, \boldsymbol{x^{1/2} \leq 0}$

$Falso$

d. $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{N};\, \boldsymbol{\frac{x^2-9}{x+3} = x - 3}$

$Verdad$

Ejercicios propuestos

1. Usando reglas de inferencia, valida los siguientes razonamientos.

a. Se tiene las siguientes premisas

$$\begin{array}{l} \mathbf{1.}\ \neg \boldsymbol{p} \\ \mathbf{2.}\ \neg \boldsymbol{q} \to \boldsymbol{r} \\ \mathbf{3.}\ \boldsymbol{q} \to \boldsymbol{p} \\ \hline \boldsymbol{C = r} \end{array}$$

b. Se tiene las siguientes premisas

$$\begin{array}{l} \mathbf{1.}\ \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \\ \mathbf{2.}\ \boldsymbol{p} \to \boldsymbol{q} \\ \hline \boldsymbol{C = q} \end{array}$$

c. Se tiene las siguientes premisas

$$\begin{array}{l} \mathbf{1.}\ \neg \boldsymbol{t} \vee \neg \boldsymbol{s} \\ \mathbf{2.}\ \neg \boldsymbol{q} \to \boldsymbol{t} \\ \mathbf{3.}\ \boldsymbol{q} \to \neg \boldsymbol{r} \\ \mathbf{4.}\ \boldsymbol{r} \\ \hline \boldsymbol{C = \neg s} \end{array}$$

2. Formalice y niegue las siguientes proposiciones.

a. R: Algunos números primos son divisibles para sí mismo o Algunos números naturales son pares.
b. Q: Algunos quiteños tienen automóviles o todos los cuencanos no tienen motocicletas.
a. S: Todos los liguistas tienen camisetas autografiadas si y solo si algunos barcelonistas tienen gorras amarillas.

3. Determine el valor de verdad de la siguiente proposición

a. $\forall \boldsymbol{m} \in \mathbb{N}; \exists \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}; \boldsymbol{2n+1=m\ impar}$
b. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R};\ \boldsymbol{x^2-1\geq 0}$
c. $\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R};\ \boldsymbol{\frac{1}{x-2}\ es\ una\ fución\ cuadrática}$

Respuestas en la página 228

Capítulo 02

Conjuntos

Figura 3.
Uso de conjuntos en contextos económicos.

Tomado de: https://n9.cl/0dxd20

Los conjuntos, una parte fundamental de las matemáticas, tienen aplicaciones en una amplia variedad de campos. La economía no es una excepción. En el contexto económico, los conjuntos se utilizan para modelar y analizar una variedad de situaciones que van desde la teoría del consumidor hasta la teoría de juegos y la microeconomía aplicada. Al considerar conjuntos en economía, es importante centrarse en la relación entre elementos, representando categorías, grupos y relaciones entre variables económicas.

¿Conoces más aplicaciones de conjuntos?

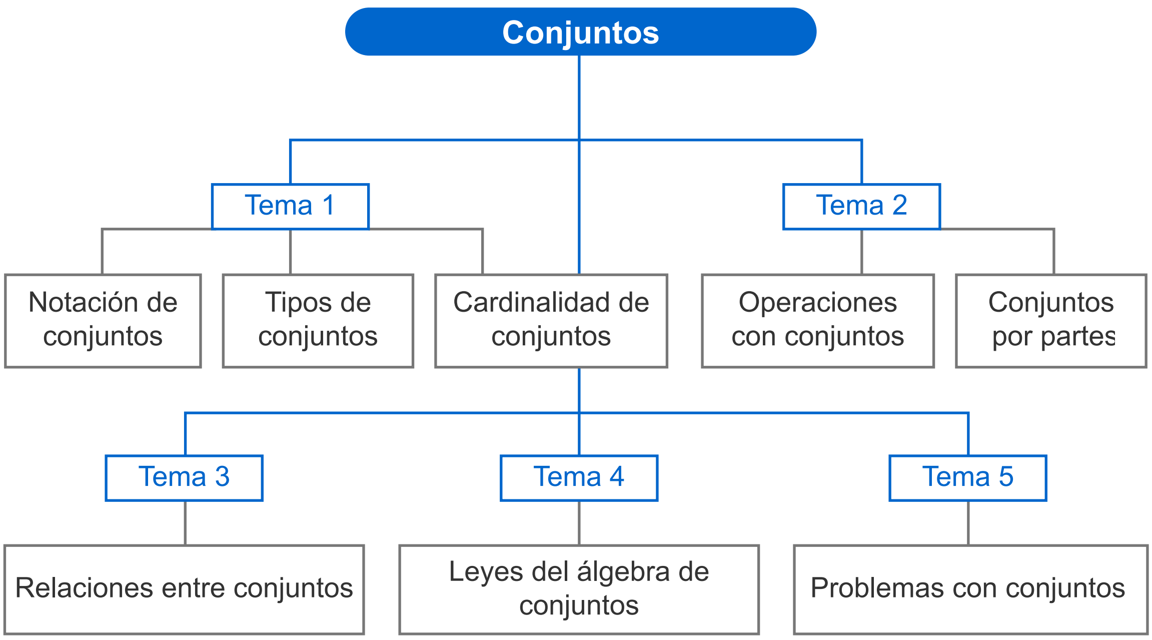
Objetivos de unidad

1. Conocer los conceptos básicos de conjuntos a través de teoremas y ejercicios para su aplicación en problemas relacionados con economía.

2. Realizar operaciones y representaciones de conjuntos mediante la utilización de axiomas y diagramas de Venn para la representación de las relaciones entre conjuntos.

3. Aprender a simplificar expresiones que contienen operaciones entre conjuntos mediante el uso de leyes del álgebra de conjuntos para la resolución de problemas.

Figura 4.
Temas a trabajar



Tema 1
Notación de conjuntos, tipos de conjuntos y cardinalidad de conjuntos

Definición de conjunto:

Un conjunto es una colección bien definida de objetos, considerados como elementos del conjunto.

Generalmente los conjuntos se representan con letras mayúsculas y sus elementos con letras minúsculas. Los conjuntos más importantes en la matemática utilizan su propia notación, por ejemplo:

$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales.
$\mathbb{Z}$	Conjunto de los números enteros.
$\mathbb{Q}$	Conjunto de los números racionales.

Pertenencia ($\in$) :

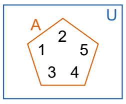
Cuando un elemento forma parte de un conjunto, se utiliza la notación $\in$, que se lee como "pertenece a". Si el elemento no pertenece al conjunto se utiliza $\notin$.

Ejemplo: Sea $A = \{\, las\ vocales \,\}$, entonces $a \in A$, lo que significa que la letra a pertenece al conjunto A. $b \notin A$, lo que significa que la letra b no pertenece al conjunto A.

Tipos de conjuntos

La forma como se expresa los elementos de un conjunto puede ser determinada de diferentes formas, siendo las más utilizadas:

Tabla 1.
Tipos de conjuntos, notaciones y explicaciones.

Notación por	Ejemplo	Explicación
Comprensión	$A = \{las\ números\ enteros\ del\ 1\ al\ 5\}$	Nombra una propiedad que cumplan todos los elementos.
Extensión	$A = \{1,2,3,4,5\}$	Nombra cada uno de los elementos del conjunto.
Fórmula	$A = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge\ x \leq 5\}$	Nombra una propiedad que cumplan todos los elementos mediante fórmulas matemáticas.
Por diagramas de Venn		Se coloca cada uno de los elementos en el interior de un figura geométrica plana.

Cardinalidad de un conjunto:

La cardinalidad de un conjunto A finito es el número de sus elementos no repetidos. Se denota con $n(A)$.

Para comprender esto de mejor forma se analiza los siguientes ejemplos:

Conjunto	Número de elementos
$C = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge\ x \leq 5\}\}$	$n(C) = 5$
$D = \{gato, vaca, perro, loro\}$	$n(D) = 4$

Clasificación de conjuntos

Existen varias clasificaciones de conjuntos. Para este libro, se ha tomado la siguiente clasificación:

Tabla 2.
Clasificación de tipos de conjuntos.

	Tipo de conjunto	Definición	Ejemplo
Por relación entre los elementos	Conjuntos intersecantes o solapados	Son los conjuntos que tienen elementos en común.	A = {1, 2, 5, 8} y B = {1, 3, 6} Los conjuntos A y B tienen el elemento 1 en común.
	Conjuntos disjuntos	Son los conjuntos que no tienen elementos comunes.	C = {-5, 2, 3, 6} y D = {1, 4, 7} Los conjuntos C y D no tienen elementos en común.
	Conjuntos equipotentes o coordinables.	Son los conjuntos que tienen la misma cantidad de elementos.	E = {0, 1, 4, 6} y F = {5, 8, 9,10} $n(E) = n(F) = 4$, entonces E y F son conjuntos equipotentes.
Por el número de elementos	Conjunto finito	Un conjunto finito es un conjunto que tiene un número limitado de elementos.	$G = \{las\ vocales\}$ El número de elementos de G se pueden contar y es un número limitado.
	Conjunto infinito	Un conjunto infinito es un conjunto que tiene un número ilimitado de elementos.	$V = \{\,números\ primos\,\}$ Los números primos se extienden indefinidamente por lo que es imposible contar todos los números primos.
	Conjunto vacío ($\emptyset$)	Un conjunto que no tiene elementos.	$M = \{\ \}$ El conjunto M no tienen elementos por lo que es un conjunto vacío.
	Conjunto unitario	Un conjunto que tiene un solo elemento	$N = \{gato\,\}$ El conjunto N tiene un solo elemento.
	Conjunto universo (U)	Es un conjunto que tiene todos los elementos del problema en contexto.	$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\ \}$ $A = \{\ 1,2,9\}$ $B = \{\,2,6,7,8\,\}$

Ejercicios resueltos

1. Dado el conjunto $X = \{x \in \mathbb{Z} \,/ -2 \leq x \leq 12\}$, define un conjunto Y que contenga todos los números enteros elementos del conjunto X, que sean divisibles para 2 pero no para 3.

Resolución:

Definimos el conjunto X según lo que nos proporciona el ejercicio, esto significa que el conjunto X contiene todos los números que son enteros y están comprendidos desde -2 hasta 12. Además, necesitamos identificar los números enteros del conjunto X que sean divisibles para 2 pero no por 3. Esto quiere decir que:

- Los números divisibles por 2, son los que tienen como residuo 0 cuando a estos se les divide para el 2.
- Los números divisibles por 3, son los que tienen como residuo 0 cuando a estos se les divide para el 3.

De acuerdo a lo antes mencionado, se identifica que los números divisibles para 2 en el conjunto X son: $\{-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.
Además, se identifica los números que son divisibles para 2 pero no para 3, es decir los números: $\{-2, 2, 4, 8, 10\}$.
Por lo tanto, el conjunto requerido es: $Y = \{-2, 2, 4, 8, 10\}$.

2. Para cada uno de los conjuntos a continuación, identifica su tipo (finito, infinito, vacío, unitario). Realiza una explicación justificada de tu respuesta.

a. $X = \{x \in \mathbb{Z} \,/ -5 \leq x \leq 5\}$
b. $Y = \{y \in \mathbb{N} \,/\, y \text{ es primo}\}$
c. $W = \emptyset$

a. **Conjunto X**
Tipo: Finito.
El conjunto X es finito ya que contiene un número finito de enteros entre -5 y 5.

b. **Conjunto Y**
Tipo: Infinito.
El conjunto Y es infinito porque contiene todos los números primos.
Dado que hay infinitos números primos, el conjunto Y es infinito.

c. **Conjunto W**
Tipo: Vacío.
El conjunto W es vacío porque no contiene ningún elemento. Se denota como $\emptyset$.

Ejercicios propuestos

1. Considera los conjuntos G y H y determina si son finitos o infinitos
$G = \{x \ / \ x \text{ es un número entero impar entre } 20 \text{ y } 30\}$
$H = \{y \ / \ y \text{ es un número entero par negativo}\}$

2. Teniendo el conjunto $X = \{x\}$, el conjunto $Y = \{ \quad \}$ y el conjunto definido de la siguiente manera $Z = \{x, y, z \ / \ x + y + z = 0 \text{ tal que x, y, z son números enteros}\}$. Indique el tipo de conjunto.

3. Analizar el conjunto $B = \{5, 10, 15, 20, 25\}$ ¿Cuál de las afirmaciones describe correctamente el conjunto B? Seleccione la respuesta correcta:

   a) B es un conjunto finito y unitario
   b) B es un conjunto infinito y vacío
   c) B es un conjunto finito y vacío
   d) B es un conjunto finito e infinito

4. Dentro de cada conjunto, selecciona un elemento y describe cómo cambiaría la cardinalidad si ese elemento se elimina del conjunto.

Conjuntos:

a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 11, 18, 16\}$
b) $B = \{a, e, u, j\}$
c) $C = \{Lunes, Martes, Miércioles, Jueves, Viernes, Sábado\}$

5. Considera dos conjuntos M y N definidos de la siguiente manera:

$M = \{1, 2, 3\}$
$N = \{a, b, c\ , d\}$
Determina si es posible establecer una correspondencia uno a uno entre los elementos de los conjuntos M y N. En caso de serlo, proporciona la correspondencia. De lo contrario, explica por qué no es posible.

6. Ordena los siguientes conjuntos en orden ascendente según su cardinalidad, es decir, de menor a mayor cantidad de elementos.

$A = \{a, b, c, d\}$
$B = \{1, 7, 9, 26, 59, 46\}$
$C = \{\quad\}$
$D = \{x\ /\ x \geq 0\}$

Respuestas en la página 229

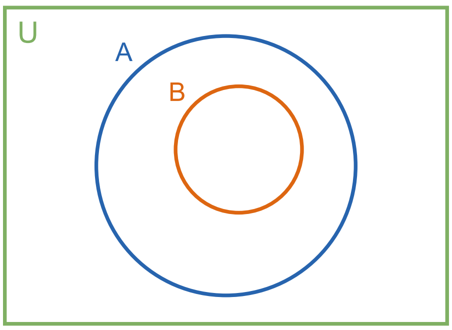
Tema 2
Relaciones entre conjuntos

Dados los conjuntos A y B, se puede decir:

Tabla 3.
Relaciones entre los conjuntos.

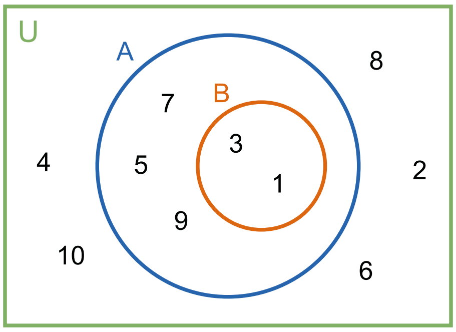
Igualdad	Los conjuntos A y B son iguales si y solo si tienen los mismos elementos.	En notación matemática se escribe de la siguiente forma: $A = B \iff (\forall x \in A: x \in B) \wedge (\forall x \in B: x \in A)$
Subconjunto	Si cada elemento del conjunto A está incluido en B, entonces se puede decir que A es subconjunto de B, si y solo sí todos los elementos de A pertenecen a B.	En notación matemática se escribe de la siguiente forma: $A \subseteq B \iff (\forall x \in A: x \in B)$
Subconjunto propio	Se dice que el conjunto A es subconjunto propio de B, si y solo si A es subconjunto de B pero nunca son iguales.	En notación matemática se escribe de la siguiente forma: $A \subset B \iff (\forall x \in A: x \in B) \wedge (A \neq B)$

Ejemplo:



Si B es subconjunto de A se escribe de la forma: $B \subset A$. En caso de que B pudiera ser igual a A se escribe de la siguiente forma: $B \subseteq A$.

Ejercicios resueltos



Sea $U = \{los\ números\ del\ 1\ al\ 10\}$, $A = \{x\ /\ 2x - 1\ \forall\ 1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{1,3\}$

Se puede obtener las siguientes relaciones de conjuntos:

Relación	Explicación
$A \subset U$	A es subconjunto de U, ya que, U contiene todos los elementos de A.
$B \subset U$	B es subconjunto de U, ya que, U contiene todos los elementos de B.
$B \subset A$	B es subconjunto de A, ya que, U contiene todos los elementos de B.

Ejercicios propuestos

1. Si $A = \{a, b, c, d\}$, ¿las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas?

a) $a \subset A$.
b) $\{b, c\} \in A$.
c) $\{b, c, d, e\} \in A$.
d) $\emptyset \in A$

2. Si $P = \{\emptyset, 3, 7, 8, 8, 5, 7\}$, señale si las proposiciones son verdaderas o falsas.

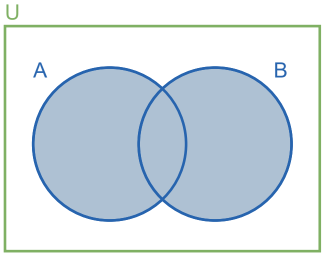
a) $7 \subset P$.
b) $\{3, 7\} \subset P$.
c) $(3, 5) \in P$.
d) $\emptyset \in P$.

Respuestas en la página 229

Tema 3
Operaciones con conjuntos y conjuntos por partes

Sean: A,B conjuntos contenidos en un conjunto universo $\mathbf{U}$, se define las operaciones de la siguiente manera:

Unión: Se define como $A \cup B = \{x \in \mathbf{U} \,/\, x \in A \ \vee \ x \in B\}$



Ejemplo: Sea $A = \{\mathrm{a, b, c, d, e}\}$ y $B = \{\mathrm{a, e, i, o, u}\}$,

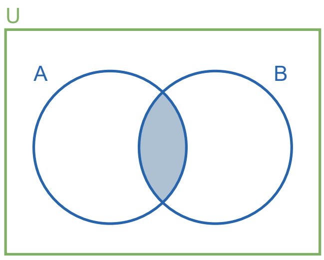
$$A \cup B = \{\mathrm{a, b, c, d, e, i, o, u}\}$$

Interdisciplinariedad

Análisis de encuestas económicas utilizando Teoría de Conjuntos:

El análisis interdisciplinario de encuestas económicas usando la teoría de conjuntos segmenta la población en grupos según ingresos y preferencias de ahorro. Luego, modelos económicos interpretan estos datos para diseñar políticas fiscales efectivas, como incentivos al ahorro, adaptadas a cada segmento.

Intersección: Se define como $A \cap B = \{x \in \mathbf{U} \,/\, x \in A \ \wedge \ x \in B\}$

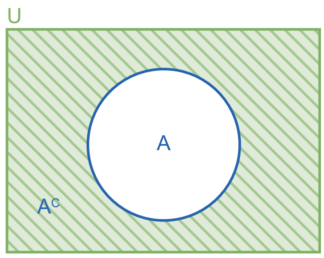


Ejemplo: Sea $A = \{2,4,6,8,10\}$ y $B = \{4,5,6,7,8\}$

$$A \cap B = \{4,6,8\}$$

Complemento: El complemento de un conjunto A se define como

$$A^c = \{x \in \mathbf{U} \,/\, x \notin A\}$$

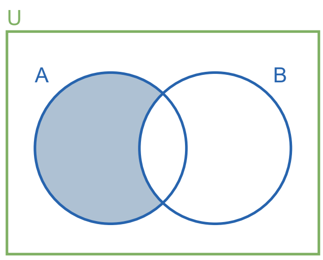


Ejemplo: $\mathbf{U} = \{x / x^2 \in N \ \wedge x \leq 5 \}$

$A = \{1,4,25\}, \ \ A^c = \{9,16\}$

Diferencia: Se define la diferencia como

$$A - B = A \setminus B = \{x \in \mathbf{U} \,/\, x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$



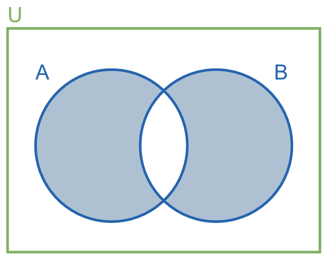
Ejemplo: Sea $A = \{2,4,6,8,10\}$ y $B = \{4,5,6,7,8\}$

$$A \setminus B = \{2,10\}$$

$$B \setminus A = \{5,7\}$$

Diferencia simétrica: Se define la diferencia simétrica como:

$$A\Delta B = \{x \in \mathbf{U} \,/\, x \in A \veebar x \in B\}$$



Ejemplo: Sea $A = \{\mathrm{a, b, c, d, e}\}$ y $B = \{\mathrm{a, e, i, o, u}\}$,

$A\Delta B = \{\mathrm{b, c, d, i, o, u}\}$

Conjunto por partes:

También llamado conjunto potencia de un conjunto A, se denota por $P(A)$ y es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A, incluido el conjunto A y el conjunto vacío.

Ejemplo:
Dado el conjunto $A = \{x \,/ x - 1 \in \mathbb{N} \wedge 1 < x < 6\}$, encuentre el conjunto potencia.

Para la resolución se escribe el conjunto A de forma tabular $A = \{1,2,3,4\}$, una vez realizado esto es más sencillo encontrar el conjunto $P(A)$

$$P(A) = \left\{\begin{matrix} \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \\ \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\} \end{matrix}\right\}$$

Para comprobar que el conjunto potencia está realizado correctamente el número de elementos debe ser $2^{n(A)}$.

Ejercicios resueltos

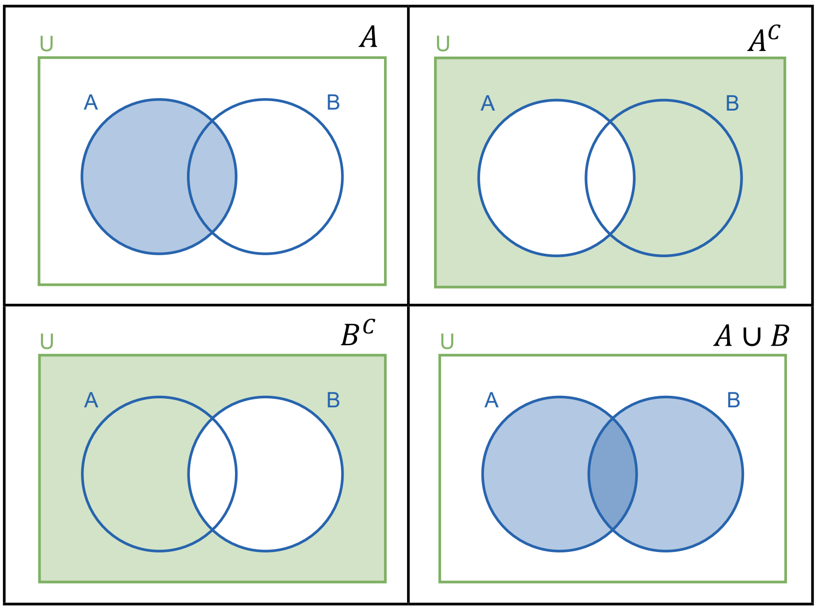
1. Dado dos conjuntos C y D, determine cuál es su intersección, es decir, calcule la operación $C \cap D$.

$C = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 1 < x \leq 15\}$
$D = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ es un número par}\}$

Resolución:
Se define al conjunto C como el conjunto de todos los números naturales mayores que 1 y menores o iguales que 15. Y el conjunto D se forma por todos los números naturales que son pares. Ahora, para encontrar la intersección se busca los elementos que pertenecen a ambos conjuntos, es decir, los números que son pares y están entre el 1 y el 15. Para eso, se determina dichos números pares en el rango antes mencionado, los cuales son: $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$. Finalmente, la intersección de C y D son los números que están en ambos conjuntos y que pertenecerán al nuevo conjunto $C \cap D = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$.

2. En el Diagrama de Venn que sigue, sombrea:

A
A^C
B^C
$A \cup B$



Ejercicios propuestos

1. Sí $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 2 \leq x < 5\}$ y $B = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 6 < x < 10\,\}$. Calcula $A \cup B$.

2. Dados los conjuntos:

$L = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 1 \leq x \leq 5\}$
$M = \{x \in \mathbb{Z} \,/ -2 < x < 2\}$

Calcula las siguientes diferencias de conjuntos:
a) $L - M$
b) $M - L$

3. Sea $J = \{2, 3, 5,7, 9\}$ y $K = \{2, 4, 6,7, 8\}$. Halla $J \,\Delta\, K$.

4. Dado los conjuntos A, B y C, selecciona entre las opciones la que representa la intersección de los conjuntos antes mencionados. Los conjuntos se definen como:

$A = \{x, y, x + 2, y + 3, z\}$
$B = \{y, x + 2, z + 1\}$
$C = \{y, y + 3, x + 2, z\}$

a. $\{x + 3, y + 2, z + 1\}$
b. $\{y, x + 2, z + 1\}$
c. $\{x, y, x + 5, y + 3, z\}$
d. $\{y, x + 2\}$
e. $\{x + 3, y + 2, z + 4\}$

5. Si:
$A = \{x \in \mathbb{N}/x^2 - 4 = 0\,\}$
$B = \{x \in \mathbb{R}\,/x^2 - 3x + 2 = 0\}$

Entonces la $A \cap B$ es:
a) $\emptyset$
b) $\{2\}$
c) $\{1\}$
d) $\{-2\}$

6. Si $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6\}$, el número de subconjuntos de *A* es:

Respuestas en la página 229

Tema 4

Leyes del álgebra de conjuntos

Idempotencia:

$A \cup A = A$; $A \cap A = A$

Conmutativa:

$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

Asociativa:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Distributiva:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Identidad:

$A \cup \emptyset = A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cup \mathrm{U} = \mathrm{U}$

$A \cap \mathrm{U} = A$

Complemento:

$A \cup A^C = U$

$A \cap A^C = \emptyset$

$(A^C)^C = A$

$U^C = \emptyset$

$\emptyset^C = U$

Leyes de D' Morgan:

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$; $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Leyes de Absorción:

$A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$

Por definición:
$A \setminus B \;=\; A \;\cap\; B^C$
$A \,\Delta\, B \;=\; (A \setminus B) \;\cup\; (B \setminus A)\;;\;\; A \,\Delta\, B \;=\; (A \;\cup B)\setminus(A \;\cap B)$
$A \setminus(B \;\cup C) \;=\; (A \setminus B) \;\cap\; (A \setminus C)$
$A \setminus(B \cap C) \;=\; (A \setminus B) \;\cup (A \setminus C)$

Ejercicios resueltos

1. Sean A y B dos conjuntos, demuestre la siguiente igualdad:

$(\mathrm{A^c} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{B}$

$B \cap (\mathrm{A^c} \cup \mathrm{A}) = B$; aplicando propiedad distributiva

$B \cap (U) = B$; aplicando ley del complemento en $\mathrm{A^c} \cup \mathrm{A}$

$B = B$; por identidad

2. Usando las leyes del algebra de conjuntos, simplifique:

$\{[(A\setminus B) \cap \mathrm{B}] \cap [(A \cup \mathrm{B}) \cap \mathrm{C}]\}^C$

$\{[(A \cap B^C) \cap \mathrm{B}] \cap [(A \cup \mathrm{B}) \cap \mathrm{C}]\}^C$; aplicando la definición para $A\setminus B$

$\{[A \cap (B^C \cap \mathrm{B})] \cap [(A \cup \mathrm{B}) \cap \mathrm{C}]\}^C$; aplicando propiedad asociativa en $(A \cap B^C) \cap \mathrm{B}$

$\{[A \cap \emptyset] \cap [(A \cup \mathrm{B}) \cap \mathrm{C}]\}^C$; por ley del complemento

$\{\emptyset \cap [(A \cup \mathrm{B}) \cap \mathrm{C}]\}^C$; por identidad aplicado en $A \cap \emptyset$

$\{\emptyset\}^C$; por identidad

U; por complemento del conjunto vacío

Ciudadanía digital

Ingrese a Symbolab mediante el siguiente enlace:

https://tinyurl.com/282h6tt9

Allí, encontrará la solución del presente ejercicio.

Ejercicios propuestos

1. Utilizando las propiedades de las operaciones entre conjuntos, simplifique a su mínima expresión: $(A \cup B^c) \cap B$

2. Usa las propiedades de las operaciones entre conjuntos, simplifique la siguiente expresión: $(A \cap B) \cup (A \cap B^C)$

3. Simplifique $(A^C \cap B)^C \cup (B \cup A^C)^C \cup A$

4. Demuestre que: $[(A \cup B)^c \ \cup \ (A \cap B^c)] \, \Delta \, A^C = A^C \, \Delta \, B^C$

5. Identifique cuál conjunto NO es el universo:
   a) $[A \cap (A^c \cup B)]^c \cup A$
   b) $[B^c \cap (A \cup B)]^c \cup A$
   c) $[B^c \cap (A^c \cup B)]^c \cup A^c$
   d) $[B \cap (A^c \cup B)]^c \cup A$

Respuestas en la página 229

Tema 5
Problemas con conjuntos

Pautas para la resolución de ejercicios:

1. La forma más sencilla de conocer los elementos de un conjunto es colocándolos en notación tabular. Por eso, si se encuentra con conjuntos en otras notaciones es preferible que los transforme a notación tabular.

2. Siempre que sea posible, realice un diagrama de Venn, en especial si son más de dos conjuntos, de modo que se dificulte ver los elementos de cada conjunto

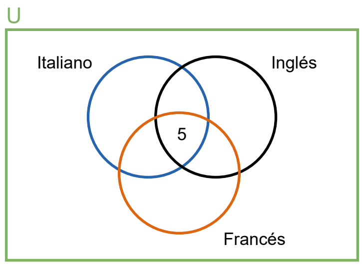
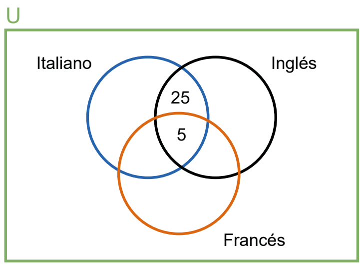
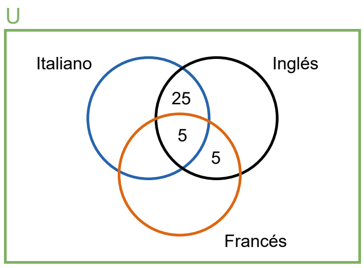
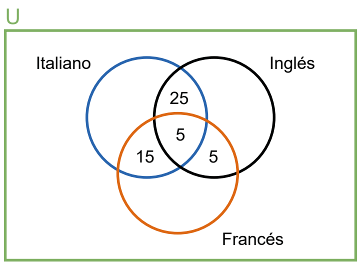
3. Los conjuntos se resuelven de adentro hacia fuera. Por ejemplo, si se tienen 3 conjuntos, se empieza colocando los elementos de la intersección de los tres conjuntos, luego los elementos de la intersección de los conjuntos de dos en dos y se finaliza con los elementos que pertenecen a un solo conjunto.

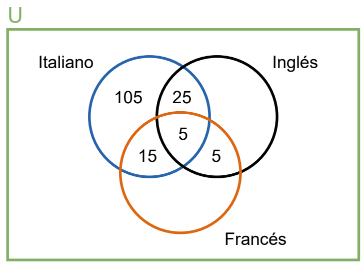
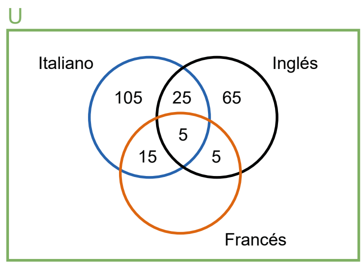
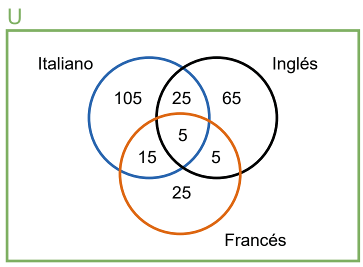
Ejercicios resueltos

1. En una escuela, 150 alumnos estudian italiano, 100 alumnos estudian inglés y 50 estudian francés. 30 alumnos estudian italiano e inglés, 20 alumnos estudian italiano y francés, 10 alumnos estudian inglés y francés, y 5 alumnos estudian los tres idiomas.

a. ¿Cuántos alumnos estudian solo dos idiomas?
b.¿Cuántos alumnos estudian solo un idioma?

Tabla 4.
Resolución paso a paso.

<table>
<tr><td>
</td><td>Para la resolución del ejercicio, se empieza en la intersección de los tres idiomas y se coloca el 5.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>A continuación, se coloca los valores en las intersecciones de dos idiomas. Entonces, en la intersección de inglés e italiano se debe tener 30 pero como se tienen 5 en los 3, se coloca 25 en la sección de solo inglés e italiano.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>En la intersección de inglés y francés se tiene 10 elementos entonces en solo inglés y francés se coloca el 5.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>En italiano y francés se tiene 20 elementos por lo tanto en el espacio para solo italiano y francés se coloca el 15.</td></tr>
</table>

	Para que en el conjunto de italiano se tenga los 150 alumnos se coloca entonces en solo italiano 105.
	Para que en el conjunto de inglés se tenga los 100 alumnos se coloca entonces en solo italiano 65.
	Para que en el conjunto de francés se tenga los 50 alumnos se coloca entonces en solo italiano 25.

a)25+15+5=45
b)105+65+25=195

Ejercicios propuestos

1. Se preguntó a 50 padres de alumnos sobre los deportes que practican y los resultados fueron los siguientes:

15 padres practican solo tenis.
10 padres practican tenis y natación.
8 padres no practican ninguno de estos deportes.

Queremos averiguar el número de padres que practican solo natación

2. Se tiene dos conjuntos, A y B. Se sabe que el conjunto A tiene 80 elementos y el conjunto B tiene 100 elementos. La intersección de los conjuntos A y B contiene 40 elementos.

¿Cuántos elementos hay en la unión de los conjuntos A y B?

3. Suponga que tienen tres conjuntos: A, B y C. Se sabe que:

- El conjunto A tiene 50 elementos.
- El conjunto B tiene 40 elementos.
- El conjunto C tiene 30 elementos.
- La intersección de cualquier par de conjuntos tiene exactamente 10 elementos.
- La intersección de los tres conjuntos $A \cap B \cap C$, tiene exactamente 5 elementos.

¿Cuántos elementos hay en la unión de los tres conjuntos $A \cup B \cup C$?

4. Una agencia gubernamental desea entender las preferencias de inversión de diferentes grupos de población para diseñar políticas económicas más efectivas. En una encuesta realizada a 100 personas, se les preguntó si preferían invertir en la bolsa de valores, en plazo fijo o ambas opciones financieras. Los resultados fueron los siguientes:

- Prefieren invertir en la bolsa 30 personas.
- Prefieren invertir en plazo fijo 40 personas.
- No prefieren ninguna de las dos opciones 16 personas.

¿Cuántas personas prefieren invertir en la bolsa y no a plazo fijo?

5. En la facultad de Educación Física, de 27 alumnos totales, 18 se inscribieron en fútbol, 7 se inscribieron en natación y fútbol. De modo que, el número de inscritos en natación es:

6. En un instituto de investigación trabajan 70 personas. De estas, 47 conocen inglés, 35 alemán y 23 ambos idiomas. ¿Cuántas personas en el instituto no conocen inglés ni alemán?

7. Una persona come plátano o naranja cada mañana durante el mes de mayo. Si come manzana 25 mañanas y mandarina 18 mañanas.

¿Cuántas mañanas come manzana y mandarina?

7. Una persona come plátano o naranja cada mañana durante el mes de mayo. Si come manzana 25 mañanas y mandarina 18 mañanas.

¿Cuántas mañanas come manzana y mandarina?

8. En una encuesta a 80 personas en Quito sobre la preferencia de las redes sociales Facebook y Tiktok, se obtuvo que 30 prefieren Facebook, 35 prefieren Tiktok y el 20% de quienes prefieren Facebook también prefiere tiktok. El número de personas que no prefieren Facebook ni Tiktok son:

9. De 80 alumnos, 36 estudian en el día, 45 en la tarde y 25 en la noche.

¿Cuántos estudian en solo 2 jornadas, si solo uno estudia en las 3 jornadas?

10. Una empresa desea analizar la demanda de tres productos diferentes (A, B y C) y tomar decisiones estratégicas sobre marketing y producción. La empresa tiene datos sobre 100 clientes que compran cada uno de los productos. 50 compran el producto A, 40 compran el producto B y 35 compran el producto C. Además 18 compran los productos A y B, 20 los productos A y C, 15 los productos B y C y 4 compran los 3 productos.

¿Cuantas personas compran solo un producto?

11. De 40 personas que viajan rumbo a Asia, 17 dijeron que visitarían India, 18 China y 12 Japón; 5 de los encuestados viajarán a India y Japón y 4 de ellos visitarán también China; 4 solo van a Japón y 7 solo a China.

¿Cuántos van solo a India?

Respuestas en la página 229

Capítulo 03

Números Reales

Figura 5.
Desarrollo de los números en la cultura egipcia.

Nota. Tomado de Símbolos y dioses egipcios, Freepik, 2024, https://www.freepik.es/vector-gratis/simbolos-dioses-egiptos-dibujados-mano_2720719.htm#fromView=search&page=1&position=13&uuid=57038296-7ec0-46cb-9723-e1258e98d43d.

La idea de contar nace de manera intuitiva en la humanidad. La necesidad de contar los objetos dio origen a los números naturales. De la necesidad de repartir surgieron los números racionales. En el contexto de la arquitectura aparecieron los primeros números irracionales: $\sqrt{2}$, π. La forma de escribirlos y de realizar operaciones entre los números dieron lugar a los sistemas de numeración, que fueron parte del desarrollo cultural de las distintas sociedades.
En la actualidad, el sistema de numeración mundialmente aceptado es el sistema de numeración decimal con caracteres arábigos, que es el que se tiene que tener claro su esquema axiomático para su utilización.

¿Qué otros sistemas de numeración conoces?

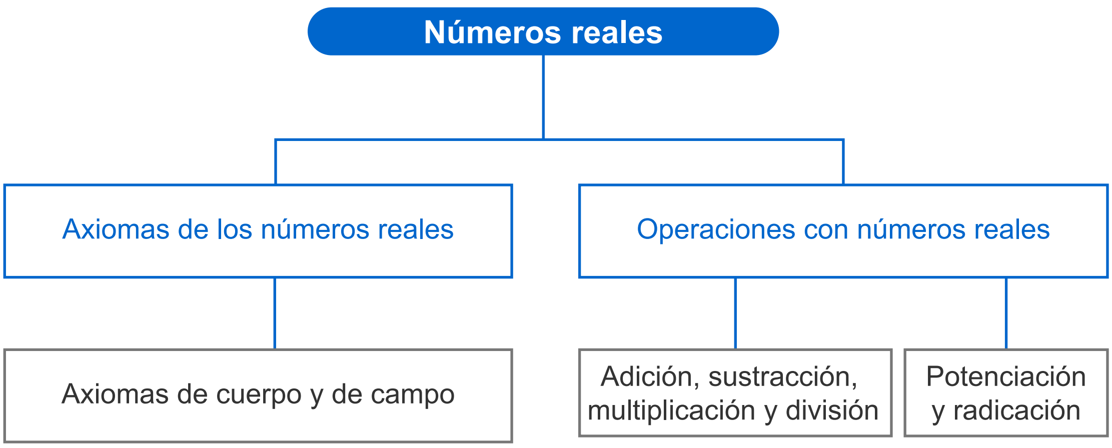
Objetivos de unidad

1. Comprender la naturaleza de los números reales, a través de su planteamiento axiomático, para el modelado de situaciones relacionadas con economía.

2. Realizar operaciones con los números reales, considerando sus propiedades, para la correcta resolución de procesos en los que se encuentran involucrados.

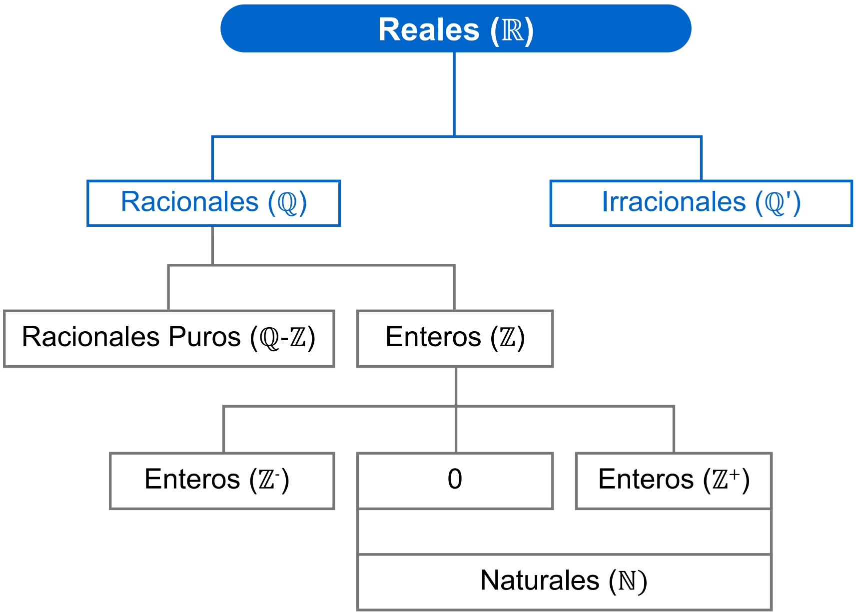
3. Recordar procedimientos específicos de manipulación de los distintos conjuntos pertenecientes a los números reales, describiendo de manera explícita los procesos, para el agilitamiento del trabajo con estos conjuntos.

Figura 6.
Temas a trabajar.



Tema 1
El conjunto de números reales, axiomas de campo e identidad

Entre los conjuntos más importantes que se trabaja en la matemática, se incluye a los conjuntos de los números. El estudiantado se familiariza con estos conjuntos desde los años de la escuela primaria. Es necesario identificar las clasificaciones más comunes de los números que van a ser más usados en la carrera:



Hay que observar que, generalmente, se representa, por su facilidad, en la recta numérica, tanto al conjunto de los números reales como al de los enteros. También es importante considerar que todas las propiedades y todo lo que se puede trabajar con los números reales son propiedades y se puede trabajar con cualquiera de sus subconjuntos. Ahora bien, no necesariamente todas las propiedades y todo lo que se puede trabajar con los subconjuntos de los números reales se puede aplicar al conjunto de los números reales.

Axiomas de campo e identidad de los reales

Definición de campo o cuerpo:

Un conjunto de números para el que se pueda definir dos operaciones, suma y multiplicación, con sus respectivos opuesto aditivo e inverso multiplicativo y éstas operaciones cumplan con las propiedades clausurativa, conmutativa, asociativa y distributiva, el conjunto de números es un campo o cuerpo.

Axiomas de la suma

Considerando $x, y, z \in \mathbb{R}$, se cumple que:
A1. Asociativa: $x + y + z = (x + y) + z = x + (y + z)$
A2. Conmutativa: $x + y = y + x$
A3. Existencia del neutro aditivo: existe un elemento de R, que se denota por 0 tal que: $x + 0 = x$
A4. Existencia del opuesto aditivo: Para cada x є R, existe un y є R, tal que: $x + y = 0$

Axiomas de la multiplicación

Considerando $x, y, z \in \mathbb{R}$, se cumple que:
A5. Asociativa: $x\,y\,z = (x\,y)\,z = x\,(y\,z)$
A6. Conmutativa: $x\,y = y\,x$
A7. Existencia del neutro multiplicativo: existe un elemento de R, que se denota por 1 tal que: $x1 = 1x = x$
A8. Existencia del opuesto multiplicativo: para cada x є R, x ≠ 0, existe un y є R, tal que: $xy = 1$

Axioma distributivo:

Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, se cumple que $x\,(y + z) = x\,y + x\,z$

Axiomas de orden

Considerando $x, y, z \in \mathbb{R}$, se define que entre dos números reales cualesquiera, se puede tener una de las siguientes relaciones:

- x < y, que se lee: x es menor que y, x está a la izquierda de y en la recta numérica.
- x = y, que se lee: x es igual a y, x está en el mismo punto que y en la recta numérica.
- x > y, que se lee: x es mayor que y, x está a la derecha de y en la recta numérica.

También se tiene las siguientes relaciones que dan la opción de cumplir dos relaciones simultáneas:

- x ≤ y, que se lee: x es menor o igual que y
- x ≥ y, que se lee: x es mayor o igual que y

Y se cumplen los siguientes axiomas:

A09.Si x ≤ y e y ≥ x, entonces x = y
A10.Transitiva: Si x ≤ y e y ≤ z, entonces x ≤ z
A11. De relación única: x ≤ y ó y ≤ x
A12. Axioma de Orden de la Suma: Si x ≤ y, entonces x + z ≤ y + z
A13. Axioma de Orden de la Multiplicación: Si x ≤ y, z > 0,
entonces x z ≤ y z

Ejercicios resueltos

1. Verifica si el conjunto de los números reales es un campo.
Para que un conjunto de números sea considerado un campo, debe cumplir:

Propiedades de la adición:

a. Que se defina la operación suma que cumpla con las siguientes propiedades:

a.1 Clausurativa:
Por ejemplo: $3 + 5{,}3 = 8{,}3$, por lo que, efectivamente se suma 2 números reales dando como resultado otro real.

Ciudadanía digital

Resulta muy útil descomponer un número en sus factores primos con el objeto de factorar expresiones en las que se los encuentre. Hacerlo a veces puede resultar una tarea muy engorrosa, por lo que, para realizarlo rápida y correctamente, se puede contar con aplicaciones libres como:

https://es.onlinemschool.com/math/assistance/number_theory/multiplier/

a.2 Asociativa;
Por ejemplo asociamos de diferente manera:

$$\pi + 3\pi + 7\pi = (\pi + 3\pi) + 7\pi = \pi + (3\pi + 7\pi)$$
$$11\pi = (4\pi) + 7\pi = \pi + (10\pi)$$
$$11\pi = 11\pi = 11\pi$$

Por lo que, se cumple la propiedad mencionada.

a.3 Conmutativa;
Por ejemplo, se realiza una suma alterando el orden de los sumandos:

$$\pi + 3\pi = 4\pi$$
$$3\pi + \pi = 4\pi$$

Por lo que, se cumple la propiedad mencionada.

a.4 Existencia del elemento neutro aditivo, que es el cero.
Un ejemplo:

$$e + 0 = e$$

a.5 Definición del inverso aditivo. Por ejemplo, para 5π, su inverso será -5π, pues se tiene que:

$$5\pi + (-5\pi) = 5\pi - 5\pi = 0$$

Propiedades de la multiplicación:

b. Que se defina la operación producto que cumpla con las siguientes propiedades:

b.1 Clausurativa, por ejemplo: $3 \times 5{,}3 = 15{,}9$. Por lo que, efectivamente, se multiplican 2 números reales, dando como resultado otro real.

b.2 Asociativa;
Por ejemplo, se asocia de diferente manera:

$$\pi \times 3\pi \times 7\pi = (\pi \times 3\pi)\, 7\pi = \pi\, (3\pi \times 7\pi)$$
$$21\pi^3 = (3\pi^2)7\pi = \pi\, (21\pi^2)$$
$$21\pi^3 = 21\pi^3 = 21\pi^3$$

Por lo que, se cumple la propiedad mencionada.

b.3 Conmutativa;
Por ejemplo, se realiza una multiplicación alterando el orden de los factores:

$$\pi \times 3\pi = 3\pi^2$$
$$3\pi \times \pi = 3\pi^2$$

Por lo que, se cumple la propiedad mencionada.

b.4 Existencia del elemento neutro multiplicativo, que es el uno, un ejemplo:

$$e \times 1 = e$$

b.5 Definición del inverso multiplicativo, por ejemplo, para 5π, su inverso será: $\frac{1}{5\pi}$, pues se tiene que: $5\pi \times \frac{1}{5\pi} = 1$

c. Que se defina la propiedad distributiva entre el producto y la suma, por ejemplo:

$5\pi \times (3 + 7{,}6) = 5\pi \times 3 + 5\pi \times 7{,}6 = 15\pi + 38\pi = 53\pi$, que se obtiene aplicando la propiedad distributiva. Además, se podría tener la comprobación de su cumplimiento, haciendo: $5\pi \times (3 + 7{,}6) = 5\pi \times (10{,}6) = 53\pi$

Por lo tanto, con todo lo anterior, se ha verificado que el conjunto de los números reales es un campo.

2. Resuelva las siguientes operaciones justificando cada paso que realice, procure usar los axiomas que fueron revisados:

$$5\left\{4 - 6\left(\frac{7}{4} - \frac{9}{5}\right) + \left[\frac{3}{2} - \left(\frac{17}{6} - \frac{4}{3}\right)\right]\right\}$$

Tabla 5

Paso	Operación	Justificación
1	$5\left\{4-6\left(\frac{35-36}{20}\right)+\left[\frac{3}{2}-\left(\frac{17-8}{6}\right)\right]\right\}$	Obtención del MCM y de fracciones homogéneas.
2	$5\left\{4-6\left(\frac{-1}{20}\right)+\left[\frac{3}{2}-\left(\frac{9}{6}\right)\right]\right\}$	Realización de sumas algebraicas.
3	$5\left\{4+\frac{6}{20}+\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right]\right\}$	Ley de signos de la multiplicación, neutro multiplicativo y simplificación a fracción equivalente.
4	$5\left\{4+\frac{3}{10}+0\right\}$	Opuesto aditivo y simplificación a fracción equivalente.
5	$5\left\{4+\frac{3}{10}\right\}$	Neutro aditivo.
6	$5\times 4+\ 5\left(\frac{3}{10}\right)$	Ley distributiva.
7	$20+\ \frac{3}{2}$	Realización de multiplicaciones y simplificación a fracción equivalente.
8	$20\frac{3}{2}$	Expresión como fracción mixta.

Ejercicios propuestos

1. Verifique si el conjunto de los números racionales es un campo.

2. Verifique si el conjunto de los números enteros es un campo.

3. Marca con una X a qué conjuntos pertenecen los siguientes números.

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}'$	$\mathbb{R}$
-3					
e					
$\sqrt{2}$					
0					
$\sqrt{25}$					

4. Relacione las justificaciones con las operaciones que se muestran:

#	Operación	#	Justificación
1	$\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{10-6}{15}$		Ley de signos de la multiplicación y simplificación a fracción equivalente.
2	$3+5-6=2$		Ley distributiva, realización de multiplicaciones, suma algebraica y opuesto multiplicativo.
3	$-2\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{3}$		Realización de sumas algebraicas, neutro multiplicativo y ley de signos de la multiplicación.
4	$2-3+1=0$		Obtención del MCM y de fracciones homogéneas.
5	$\left(\frac{2}{3}+2\frac{1}{3}-4\right)\left(\frac{4}{7}\right)=(3-4)\left(\frac{4}{7}\right)=-\frac{4}{7}$		Realización de sumas algebraicas.
6	$\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{5}{4}-\frac{2}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right)=1$		Realización de sumas algebraicas y opuesto aditivo.

5. Resuelva las siguientes operaciones justificando cada paso que realice, procure usar los axiomas que fueron revisados:

a. $\left[\frac{5}{8} - 2\frac{1}{4}\left(\frac{8}{9} - \frac{11}{18}\right)\right]\left\{-3\left(\frac{9}{4} - \frac{25}{20}\right) + 5\left[\frac{5}{3} - \left(\frac{11}{6} - \frac{7}{6}\right)\right]\right\}$

b. $\left[\frac{9}{8} - \left(\frac{7}{6} - \frac{2}{3}\right)\left(2\frac{1}{2} - \frac{9}{4}\right)\right]\left\{3\left[\frac{2}{5} - \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{3}\right)\right]\right\}$

c. $\left[\frac{5}{8} - 2\frac{1}{4}\left(\frac{8}{9} - \frac{11}{18}\right)\right] + \left[3\frac{2}{3} - \left(\frac{11}{6} + \frac{5}{6}\right)\right]\left\{-3\left(\frac{6}{5} - \frac{2}{15}\right)\right\}$

Respuestas en la página 231

Tema 2
Operaciones con números reales

Cuando se trabaja con las operaciones con números hay que atender especialmente al orden en que se realiza dichas operaciones, así:

1. Hay que respetar los signos de agrupación, procurando siempre resolverlos desde el más interno hasta el más externo. Rara es la ocasión en la que resulta más conveniente romper los signos de agrupación sin resolver las operaciones que se encuentran en su interior.

2. Se realiza potenciaciones y radicaciones, sin descuidar los signos que correspondan.

3. Se realiza multiplicaciones y divisiones. Es necesario simplificar las expresiones o números, si es posible hacerlo, antes de realizar las operaciones. No hay que descuidar de aplicar las multiplicaciones de signos que correspondan.

4. Se realiza sumas y restas, haciéndolas de la forma en que resulte más sencillo operarlas. No hay que descuidar los signos que presenten las expresiones o números para realizar las operaciones.

Interdisciplinariedad

El uso correcto de la prioridad de las operaciones resulta crucial en el planteamiento de situaciones económicas, así: no es lo mismo decir que se debe las 3/5 partes de una deuda con sus intereses (3/5(D+i)), que decir que se debe las 3/5 partes de una deuda más sus intereses (3/5D + i).

Propiedades de la potenciación y la radicación

Es conveniente que se tenga claras éstas propiedades para realizar las operaciones de manera ágil y eficiente. Para la memorización de las propiedades, se toma en cuenta que la radicación es un exponente recíproco de la potenciación. Por este motivo, se revisa las propiedades de la potenciación y la radicación de manera simultánea, dando ejemplos de su cumplimiento, como en el siguiente ejemplo:

Considerando $x, y, z \in \mathbb{R}$, se tiene que:

P1. Número elevado a la cero: $(x + y - z)^0 = 1$, con lo que, se tiene que cualquier número o expresión elevada a la cero es 1. Con la excepción de que se tenga 0^0, que es considerado una indeterminación.

P2. Número elevado a la uno: $(x + y - z)^1 = x + y - z$, con lo que se tiene que cualquier número o expresión elevada a la uno es el mismo número o la misma expresión.

P3. Potencia elevada a otra potencia: $[(x)^y]^z = (x)^{yz}$, por lo que, se describe que una potencia elevada a otra potencia es igual a la misma base, multiplicados sus exponentes. Observe los siguientes ejemplos:

$[(2)^2]^3 = (2)^{2\times 3} = (2)^6 = 64,$

y con radicación: $\left[(64)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} = (64)^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = (64)^{\frac{1}{6}} = 2$

P4. Producto de potencias con la misma base: $(x)^y(x)^z = (x)^{y+z}$, por lo que, se describe que la multiplicación de potencias que tienen la misma base es igual a la misma base, sumados sus exponentes. Considere los siguientes ejemplos:

$(2)^2(2)^3 = (2)^{2+3} = (2)^5 = 32,$

y con radicación: $(64)^{\frac{1}{2}}(64)^{\frac{1}{3}} = (64)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = (64)^{\frac{5}{6}} = 32$

P5. División de potencias con la misma base: $\frac{(x)^y}{(x)^z} = (x)^{y-z}$, por lo que, se describe que la división de potencias que tienen la misma base es igual a la misma base, restados sus exponentes. Verifique a partir de los siguientes ejemplos:

$\frac{(2)^3}{(2)^2} = (2)^{3-2} = (2)^1 = 2$, y con radicación: $\frac{(64)^{\frac{1}{2}}}{(64)^{\frac{1}{3}}} = (64)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = (64)^{\frac{1}{6}} = 2$

De ésta última propiedad, se debe recalcar que una potencia puede intercambiar de lugar en el denominador o numerador de una expresión, escribiendo su exponente y cambiándole de signo.

P6. La potenciación y la radicación son distributivas para la multiplicación y la división, pero no para la suma y la resta.

Ejercicios resueltos

1. Resuelva las siguientes operaciones:

$$\frac{\left[\left(\sqrt[3]{\frac{7}{8}-1}\right)^2 - \sqrt{\frac{65}{16}+1}\right]\left[\left(\sqrt[3]{\frac{7}{8}-1}\right)^2 + \sqrt[3]{\frac{7}{8}-1}\sqrt[4]{\frac{65}{16}+1} + \sqrt{\frac{65}{16}+1}\right]}{\left[\left(\frac{7}{8}-1\right) - \left(\frac{65}{16}+1\right)^{\frac{3}{4}}\right]\left[2\left(\sqrt[3]{\frac{7}{8}-1}\right)^2 + 5\sqrt[3]{\frac{7}{8}-1}\sqrt[4]{\frac{65}{16}+1} + 3\sqrt{\frac{65}{16}+1}\right]}$$

En esta expresión se visualiza operaciones de números fraccionarios repetidas, por lo que, convendría resolverlas en primer lugar, para facilitar la resolución de la operación en general.

De modo que $\frac{7}{8} - 1 = \frac{7-8}{8} = -\frac{1}{8}$, y: $\frac{65}{16} + 1 = \frac{65+16}{16} = \frac{81}{16}$

Con estos resultados, se obtiene el siguiente cálculo:

$$\frac{\left[\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\right)^{2}-\sqrt{\frac{81}{16}}\right]\left[\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\right)^{2}+\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\sqrt[4]{\frac{81}{16}}+\sqrt{\frac{81}{16}}\right]}{\left[\left(-\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{3}{4}}\right]\left[2\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\right)^{2}+5\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\sqrt[4]{\frac{81}{16}}+3\sqrt{\frac{81}{16}}\right]}$$

A esta expresión se le aplica las potencias y radicaciones que vienen dadas y luego se realiza las operaciones indicadas, procurando trabajar con fracciones homogéneas. Se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}-\frac{9}{4}\right]\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{9}{4}\right]}{\left[\left(-\frac{1}{8}\right)-\frac{27}{8}\right]\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}+5\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)+3\left(\frac{9}{4}\right)\right]}$$

$$=\frac{\left[\frac{1}{4}-\frac{9}{4}\right]\left[\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+\frac{9}{4}\right]}{\left[-\frac{28}{8}\right]\left[2\left(\frac{1}{4}\right)+5\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{27}{4}\right]}$$

$$=\frac{\left[-\frac{8}{4}\right]\left[\frac{7}{4}\right]}{\left[-\frac{28}{8}\right]\left[\frac{2}{4}-\frac{15}{4}+\frac{27}{4}\right]}=\frac{\left[-\frac{14}{4}\right]}{\left[-\frac{14}{4}\right]\left[\frac{14}{4}\right]}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$$

2. Dadas las expresiones:

$$A=\frac{\left[\sqrt{2\frac{7}{9}-1\frac{7}{9}}+\sqrt{2\left(\frac{5}{8}-1\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)}\right]^{3}}{\left[\left(2\frac{7}{9}-1\frac{7}{9}\right)-2\left(\frac{5}{8}-1\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)\right]\left[\left(\sqrt{2\frac{7}{9}-1\frac{7}{9}}\right)^{3}+\left(\sqrt{2\left(\frac{5}{8}-1\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)}\right)^{3}\right]}$$

$$B=\frac{\left[3\left(\sqrt{2\frac{7}{9}-1\frac{7}{9}}\right)^{2}-5\left(\sqrt{2\frac{7}{9}-1\frac{7}{9}}\right)\left(\sqrt{2\left(\frac{5}{8}-1\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)}\right)+2\left(\sqrt{2\left(\frac{5}{8}-1\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)}\right)^{2}\right]}{\left[\left(\sqrt{2\frac{7}{9}-1\frac{7}{9}}\right)+\left(\sqrt{2\left(\frac{5}{8}-1\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)}\right)\right]^{2}\left[\left(\sqrt{2\frac{7}{9}-1\frac{7}{9}}\right)^{2}-\left(\sqrt{2\frac{7}{9}-1\frac{7}{9}}\right)\left(\sqrt{2\left(\frac{5}{8}-1\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)}\right)+\left(\sqrt{2\left(\frac{5}{8}-1\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)}\right)^{2}\right]}$$

Calcule: $C = (A.B)^{\frac{1}{3}}$

En estas expresiones se puede visualizar operaciones de números fraccionarios repetidas, por lo que conviene resolverlas en primer lugar para facilitar la resolución de la operación en general. Así:

$2\frac{7}{9} - 1\frac{7}{9} = \frac{25}{9} - \frac{16}{9} = \frac{9}{9} = 1$,

y: $2\left(\frac{5}{8} - 1\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{5}{8} - \frac{5}{4} + \frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{5-10+6}{8}\right) = \frac{1}{4}$

Con estos resultados, se calcula los valores de A y B y se obtiene:

$$A = \frac{\left[\sqrt{1} + \sqrt{\frac{1}{4}}\right]^3}{\left[(1) - \frac{1}{4}\right]\left[\left(\sqrt{1}\right)^3 + \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3\right]} = \frac{\left[1 + \frac{1}{2}\right]^3}{\left[\frac{3}{4}\right]\left[(1)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right]}$$

$$= \frac{\left[1 + \frac{1}{2}\right]^3}{\left[\frac{3}{4}\right]\left[(1)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right]} = \frac{\left[\frac{3}{2}\right]^3}{\left[\frac{3}{4}\right]\left[1 + \frac{1}{8}\right]} = \frac{\frac{27}{8}}{\left[\frac{3}{4}\right]\left[\frac{9}{8}\right]} = 4$$

, y

$$B = \frac{\left[3\left(\sqrt{1}\right)^2 - 5\left(\sqrt{1}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right) + 2\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^2\right]}{\left[\left(\sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)\right]^2\left[\left(\sqrt{1}\right)^2 - \left(\sqrt{1}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right) + \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{\left[3 - \frac{5}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\right)\right]}{\left[1 + \frac{1}{2}\right]^2\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right]} = \frac{[1]}{\frac{9}{4}\left[\frac{3}{4}\right]} = \frac{16}{27}$$

Con lo que: $C = \left(4.\frac{16}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}$

3. Resuelva las siguientes operaciones:

$$\frac{3{,}57-0{,}28\left(-\frac{5}{14}+1{,}98\right)+3{,}3\bar{5}\left(1{,}58+\frac{3}{151}-\frac{5}{3}\right)}{\frac{2}{7}\left(\frac{35}{6}\right)-\frac{3{,}178-2{,}62\overline{48}}{\frac{4}{2029}(3{,}156\bar{2})}+\frac{6}{6}}=\frac{3{,}57-0{,}28\left(-\frac{5}{14}+1{,}98\right)+3{,}3\bar{5}\left(1{,}58+\frac{3}{151}-\frac{5}{3}\right)}{\frac{5}{3}-\frac{3{,}178-2{,}62\overline{48}}{\frac{4}{2029}(3{,}156\bar{2})}+1}$$

Hay que considerar realizar las operaciones indicadas que resulten más convenientes hacerlas antes de realizar las conversiones, aquí:

$$\frac{3{,}57-0{,}28\left(-\frac{5}{14}+1{,}98\right)+3{,}3\bar{5}\left(1{,}58+\frac{3}{151}-\frac{5}{3}\right)}{\frac{2}{7}\left(\frac{35}{6}\right)-\frac{3{,}178-2{,}62\overline{48}}{\frac{4}{2029}(3{,}156\bar{2})}+\frac{6}{6}}$$

$$=\frac{3{,}57-0{,}28\left(-\frac{5}{14}+1{,}98\right)+3{,}3\bar{5}\left(1{,}58+\frac{3}{151}-\frac{5}{3}\right)}{\frac{5}{3}-\frac{3{,}178-2{,}62\overline{48}}{\frac{4}{2029}(3{,}156\bar{2})}+1}$$

Luego, éste ejercicio permite repasar la conversión de todo tipo de números decimales a fraccionarios. Es conveniente hacerlo en principio, antes de seguir con el resto de operaciones, siguiendo este proceso:

$$3{,}57=\frac{357}{100};\ 0{,}28=\frac{28}{100}=\frac{7}{25};\ 1{,}98=\frac{198}{100}=\frac{99}{50};\ \ 1{,}58=\frac{158}{100}=\frac{79}{50};\ 3{,}178=\frac{3178}{1000}=\frac{1589}{500}$$

Todos éstos son decimales que se reescriben como números racionales a partir de la lectura de sus cifras. De esta manera, por ejemplo, $3{,}57$ es 3 enteros y cincuenta y siete centésimas, por lo que se reescribe el decimal como $3{,}57=\frac{357}{100}$. Si es posible, este número fraccionario se simplifica hasta obtener la menor de las fracciones que representen el decimal dado.

Los restantes decimales, que tienen cifras infinitas, se representan como fraccionarios, ya sea usando fórmulas que se tienen para los distintos casos que se pueden presentar o a través de un suscinto proceso de razonamiento que a continuación se presenta. Haciendo las transformaciones de los decimales de este tipo dados en el ejercicio, se sigue que:

Dado que se ha asignado que $a = 3{,}3\overline{5}$, habría que multiplicar la ecuación por 10 para que quede la parte decimal que se repite de manera indefinida después de la coma de separación de decimales. Esto es $10a = 33,\overline{5}$. Luego, dado que solo se tiene un dígito que se repite de manera indefinida, se multiplica la ecuación original por 100 para que, con las dos nuevas ecuaciones que se han obtenido, al restarlas, se elimine la parte decimal que se repite de manera indefinida. Así:

$100a = 335,\overline{5}$, que al restar con la anterior ecuación manipulada, se tendrá: $90a = 302$. De todo ello, se concluye que $a = \frac{302}{90}$, fracción que representa el número con la parte decimal que se repite de manera indefinida. Igualmente, esta fracción se simplifica hasta reducirla a su mínima expresión:

$$a = \frac{151}{45}$$

Hagamos también paso a paso la conversión de: $2{,}62\overline{48}$

- **a.** Asignamos: $a = 2{,}62\overline{48}$
- **b.** Multiplicamos por 10^n , con n el número de decimales que no se repiten después de la coma decimal, aquí $10^2 a = 100(2{,}62\overline{48}) \rightarrow$ $100a = 262,\overline{48}$
- **c.** Multiplicamos por 10^{m+n} la ecuación original, con m el número de decimales que se repiten de manera indefinida, aquí: $10^4 a =$ $10000(2{,}62\overline{48})$, entonces $10000a = 26248,\overline{48}$

d. Restamos lo obtenido en c, menos lo obtenido en b, puesto que de esta manera se elimina toda la parte decimal del miembro derecho de la igualdad, así:

$$10000a = 26248,\overline{48}$$
$$-100a = -262,\overline{48}$$

➔ $9900a = 25986 \rightarrow a = \frac{25986}{9900} = \frac{4331}{1650}$

Haciendo el mismo proceso para $3{,}156\overline{2}$, se obtiene que:

$$a = \frac{28406}{9000} = \frac{14203}{4500}$$

Con todo lo anterior, la expresión queda:

$$\frac{\frac{357}{100} - \frac{7}{25}\left(-\frac{5}{14} + \frac{99}{50}\right) + \frac{151}{45}\left(\frac{79}{50} + \frac{3}{151} - \frac{5}{3}\right)}{\frac{2}{7}\left(\frac{35}{6}\right) - \frac{\frac{1589}{500} - \frac{4331}{1650}}{\frac{4}{2029}\left(\frac{14203}{4500}\right)} + 1}$$

$$= \frac{\frac{357}{100} - \frac{7}{25}\left(\frac{-125 + 693}{350}\right) + \frac{151}{45}\left(\frac{35787 + 450 - 37750}{151 \times 150}\right)}{\frac{5}{3} - \frac{\frac{52437 - 43310}{16500}}{\frac{4}{2029}\left(\frac{14203}{4500}\right)} + 1}$$

$$\frac{\frac{357}{100} - \frac{7}{25}\left(\frac{568}{350}\right) + \frac{151}{45}\left(\frac{-1513}{151 \times 150}\right)}{\frac{5}{3} - \frac{\frac{9127}{16500}}{\frac{7}{1125}} + 1} = \frac{\frac{357}{100} - \frac{568}{1250} - \frac{1513}{6750}}{\frac{8}{3} - \frac{27381}{308}}$$

$$= \frac{\frac{240975 - 30672 - 15130}{67500}}{\frac{2464 - 82143}{924}} = \frac{\frac{195713}{67500}}{-\frac{79679}{924}} = -\frac{30139802}{896388750}$$

Ejercicios propuestos

1. Una aproximación para π viene dada por:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

Dado que $\frac{\pi}{4} = 0.785 \ldots$, desarrolle la serie hasta obtener un dígito significativo de π/4.

2. Resuelva las siguientes operaciones:

$$1 + \cfrac{\frac{2}{3}}{1 + \cfrac{\frac{2}{3}}{1 + \cfrac{\frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}}}}$$

3. Resuelva las siguientes operaciones:

$$e + \cfrac{\frac{2}{3}e^2}{e + \cfrac{\frac{2}{3}e^2}{e + \cfrac{\frac{2}{3}e^2}{e + \frac{2}{3}e}}}$$

4. Resuelva las siguientes operaciones:

$$\frac{3}{5}\left\{\frac{\sqrt[3]{\frac{27}{8} + \left(\frac{5}{2}\right)^3 + \frac{191}{8}}}{\frac{2}{3} - \left[1 + \frac{6}{7}\left(\frac{2}{3} - \left(\frac{5}{6}\right)^2\right)\right]} - \frac{5}{3}\left[\left(2\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\right)^5\right]\right\}$$

5. Resuelva las siguientes operaciones:

$$\sqrt[3]{\left\{\frac{3\frac{2}{5}-4\frac{2}{3}}{6\frac{1}{3}-26\frac{3}{5}}\right\}\sqrt[3]{\left[\frac{\frac{3}{7}+\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}-\frac{4}{7}}\right]\frac{\sqrt{3^3-\sqrt{121}}}{\left(2^3\left(\frac{3}{4}\right)+\sqrt{25}\right)}}}$$

6. Encuentre el valor de las siguientes expresiones y resuelva la expresión que se solicita al final:

$$A=\frac{\left(10\left(\frac{4}{9}\right)+11\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{27}{8}\right)}{\left[\left(\frac{100}{9}\right)-\left(\frac{9}{4}\right)\right]\left[\left(\frac{4}{3}\right)^3+\left(\frac{9}{4}\right)^3\right]}\qquad B=\frac{1}{\left(\frac{10}{3}+\frac{3}{2}\right)^3\left[\left(\frac{4}{3}\right)^2-3+\left(\frac{9}{4}\right)^2\right]}$$

Calcule: $C=\ (A/B)^{\frac{1}{2}}$

7. Resuelva las siguientes operaciones:

$$\frac{4-0.28\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{3}{8}}{\frac{5}{6}-\frac{3}{4}}+3.15\left(\frac{7}{9}-\frac{8}{11}\right)}{\dfrac{5}{9}+3\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{11}\dfrac{\frac{7}{3}-12.56\overline{3}}{\frac{4}{5}-0.15\overline{4}}}$$

8. Resuelva las siguientes operaciones:

$$\frac{2}{3}+8.169\overline{4}\left\{\frac{5}{4}-0.58+\frac{12.3\overline{64}}{1-4.26\overline{7}}\left[\frac{3.\overline{5}}{\frac{6}{11}-\frac{5}{9}}\right]\right\}$$

9. Resuelva las siguientes operaciones:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{3}{4}-(1{,}2\overline{1}-1{,}7\overline{1})^{2}}}{\left(\frac{3}{8}-1,\overline{15}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{205}{66}\right)^{3}\left[\left(4{,}3\overline{56}-3,\overline{567}\right)^{3}\right]^{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

10. Resuelva las siguientes operaciones:

$$\frac{1+\frac{1}{\pi^{2}}+\frac{8}{\pi^{3}}+\frac{81}{\pi^{4}}}{1+\frac{\frac{81}{\pi^{2}+1}}{\pi^{2}+\frac{8}{\pi+\frac{1}{\pi}}}}$$

Respuestas en la página 231

Capítulo 04

Los polinomios

Figura 7.
Estructura de puente que sigue la forma de una función polinómica de grado 2.

Nota. Tomado de Hermoso paisaje sobre puente, Freepik, 2024, https://n9.cl/c0t29

Los polinomios son los modelos más elementales y comunes con los que se representa muchas realidades y situaciones de la economía, desde el modelamiento de la estructura de un puente, hasta la descripción del comportamiento de un producto en el mercado. Por este motivo, es necesario saber analizar este tipo de funciones, encontrar sus puntos de corte con los ejes, saber si presentan máximos y mínimos y poder establecer su positividad y qué representan en el contexto en el que se presentan.

¿Qué otras realidades pueden representarse con polinomios?

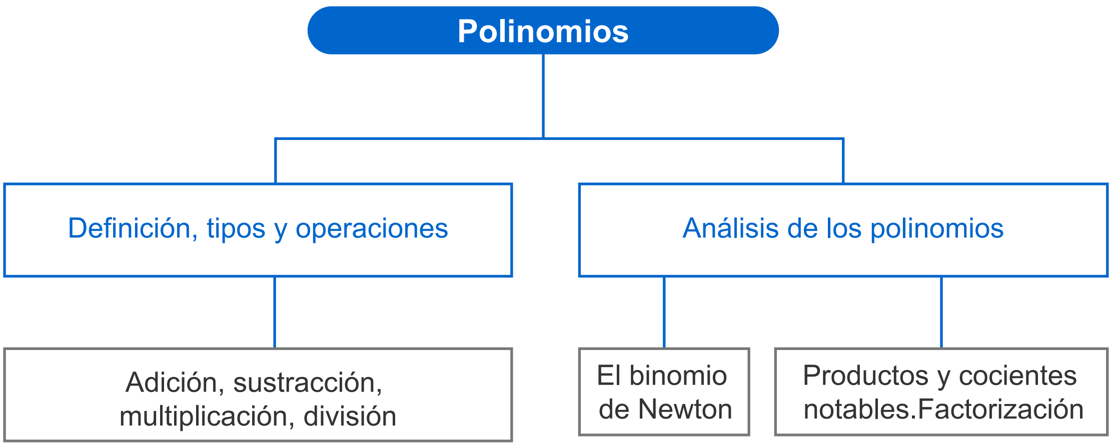
Objetivos de unidad

1. Comprender la importancia de los polinomios como modelos básicos de distintas realidades, para su análisis y estudio.

2. Realizar operaciones con los polinomios, familiarizándose con sus algoritmos de procedimiento, para la correcta resolución de procesos en los que se encuentran involucrados.

3. Analizar los polinomios y sus características a partir de sus definiciones, asociándolas con las situaciones que se encuentran modelando, para la comprensión de lo que representan en el comportamiento del modelo con el que se trabaja.

Figura 8.
Temas a trabajar.



Tema 1
El polinomio, definiciones, tipos y operaciones

Definición de polinomio:

Es una función matemática que tiene la siguiente estructura:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Se acostumbra a representarlos como $P(x), f(x),\ y, \ldots$, y sus elementos se definen así:

Cada $a_i x^i$ se conoce como término del polinomio:

$a_i \equiv$ coeficiente sub i del polinomio, con $a_i \in \mathbb{R}$;

$a_0 \equiv$ coeficiente sub 0 del polinomio, conocido como término independiente;

$a_n \equiv$ coeficiente sub n del polinomio, conocido como coeficiente del término de mayor grado del polinomio;

$x \equiv$ variable independiente de la función polinómica;

$y \equiv$ variable dependiente de la función polinómica; y

$n \equiv$ exponente del término de mayor grado del polinomio, por lo que se dice que el polinomio es de grado n.

Tipos de polinomios

Tabla 6.
Polinomios según su número de término.

#	Denominación	Ejemplo	Grado
1	Monomio	$5x^2$	2
2	Binomio	$-2{,}1x^3 + \pi x^5$	5
3	Trinomio	$4x - 2{,}1x^3 + \pi x^5$	5
4	Tetranomio	$4x - 2{,}1x^3 + \pi x^5 - ex^{12}$	12
⋮			

Tabla 7.
Polinomios según su grado.

Grado	Denominación	Ejemplo	Grafo
0	Cero o constante	5	Constante
1	Uno o lineal	$-3x + 2$	Recta
2	Dos o cuadrática	$-2x^2 + 5x - 7$	Parábola
3	Tres o cúbica	$2{,}1x^3 + \pi x^2 - 4$	Cúbica
≥4	De orden superior	$-x^5 + 4x^2 + 3$	No específico

a) Clasificaciones especiales:

Un polinomio puede estar ordenado o desordenado. Además, si se encuentra ordenado, puede estarlo de manera ascendente o descendente, de acuerdo al exponente de cada uno de sus términos.

Un polinomio puede estar completo o incompleto, para lo que se debe ordenar el polinomio y constatar si tiene todos los términos, ya sea en orden ascendente o descendente.

Operaciones con los polinomios

Para hacer operaciones con polinomios se debe tener en cuenta el trabajo con términos semejantes, que son aquellos términos que tienen las mismas variables independientes elevadas a los mismos exponentes. También hay que tener muy presente la aplicación de las propiedades de la multiplicación y división de potencias. Para hacer la revisión de las operaciones fundamentales que se realizan con los polinomios, se debe recordar cómo se realiza la división de polinomios, que es un procedimiento que involucra a todas las operaciones fundamentales. Esta operación solo es posible si grado del dividendo es mayor o igual que el grado del divisor. Vale señalar que, éstos procedimientos se recuperan en uno de los ejercicios resueltos.

Ejercicios resueltos

1. Marca con una X en la Tabla 8 a qué tipo de polinomios pertenecen las siguientes expresiones.

Tabla 8.

Expresión	Monomio	Binomio	Trinomio	Lineal	Cuadrática	Cúbica	Grado superior
$4x-3$		X		X			
$5x^5$	X						X
$-3x^2+5$		X			X		
$2x-6+4x^3$			X			X	
$\pi x+x^4-2$			X				X

2. Dados los siguientes polinomios, realice su división:

$M(x) = 3 - 4x^3 + 2x^5 - 6x$, y $N(x) = 2x - 6 + 3x^2$

Dado que grado [M(x)] = 5 y grado[N(x)] = 2, la división que es posible realizar es: M(x)/N(x). Para ello, se debe trabajar ordenándolos de manera descendente, dejando en blanco los términos que tengan coeficiente cero, así:

a. Ordenados de manera descendente los polinomios, se hace la división exacta del término de mayor grado del dividendo para el término de mayor grado del divisor:

$2x^5$		$-4x^3$		$-6x$	$+3$	$3x^2 + 2x - 6$
						$\frac{2}{3}x^3$

b. El resultado de la anterior división se multiplica por cada uno de los términos del divisor y se los ubica en el lugar que le correspondería al término obtenido, y se hacen términos semejantes con los términos respectivos:

$2x^5$		$-4x^3$		$-6x$	$+3$	$3x^2 + 2x - 6$
$-2x^5$	$-\frac{4}{3}x^4$	$+4x^3$				$\frac{2}{3}x^3$
0	$-\frac{4}{3}x^4$	0				

Al igual que se realiza la división entre números, el resultado de la multiplicación pasa con signo cambiado a operar con su término semejante correspondiente, de tal manera que el término de mayor exponente que se dividió, se anulará.

c. Se toma el término de mayor exponente que haya quedado de la suma algebraica realizada en el anterior paso y se divide exactamente éste término para el término de mayor grado del divisor. Se repite de manera reiterativa el proceso hasta que el residuo que quede de la división sea de menor grado que el del divisor:

$$
\begin{array}{cccccc|l}
2x^5 & & -4x^3 & & -6x & +3 & 3x^2+2x-6 \\
\cline{7-7}
-2x^5 & -\frac{4}{3}x^4 & +4x^3 & & & & \frac{2}{3}x^3-\frac{4}{9}x^2+\frac{8}{27}x-\frac{8}{81} \\
\cline{1-3}
0 & -\frac{4}{3}x^4 & 0 & & & & \\
 & +\frac{4}{3}x^4 & +\frac{8}{9}x^3 & -\frac{8}{3}x^2 & & & \\
\cline{2-4}
 & 0 & +\frac{8}{9}x^3 & -\frac{8}{3}x^2 & & & \\
 & & -\frac{8}{9}x^3 & +\frac{16}{27}x^2 & +\frac{16}{9}x & & \\
\cline{3-5}
 & & 0 & -\frac{8}{27}x^2 & -\frac{38}{9}x & & \\
 & & & +\frac{8}{27}x^2 & -\frac{16}{81}x & -\frac{16}{27} & \\
\cline{4-6}
 & & & 0 & -\frac{358}{81}x & +\frac{65}{27} &
\end{array}
$$

Por lo que, el resultado de la división se podría escribir:

$$\frac{2x^5-4x^3-6x+3}{3x^2+2x-6}=\frac{2}{3}x^3-\frac{4}{9}x^2+\frac{8}{27}x-\frac{8}{81}+\frac{-\frac{358}{81}x+\frac{65}{27}}{3x^2+2x-6}$$

O de forma general: $\frac{M(x)}{N(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{N(x)}$

Esta expresión se puede reescribir como: $M(x)=Q(x)N(x)+R(x)$, donde: $Q(x)$ es el cociente de la división y $R(x)$ es el residuo de la división. La última expresión es la que comúnmente se usa para verificar que el resultado obtenido es correcto.

3. Verificar que:

$$2x^5 - 4x^3 - 6x + 3 = \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{27}x - \frac{8}{81}\right)(3x^2 + 2x - 6) - \frac{358}{81}x + \frac{65}{27}$$

Dada la prioridad de las operaciones, se empieza por la multiplicación, aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación y la suma y cuidando que los términos queden ubicados de tal manera que se pueda hacer su suma algebraica:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \frac{2}{3}x^3 & -\frac{4}{9}x^2 & +\frac{8}{27}x & -\frac{8}{81} \\
 & & & 3x^2 & +2x & -6 \\
\hline
2x^5 & -\frac{4}{3}x^4 & +\frac{8}{9}x^3 & -\frac{8}{27}x^2 & & \\
 & +\frac{4}{3}x^4 & -\frac{8}{9}x^3 & +\frac{16}{27}x^2 & +\frac{16}{81}x & \\
 & & -4x^3 & +\frac{8}{3}x^2 & -\frac{16}{9}x & +\frac{16}{27} \\
\hline
2x^5 & & -4x^3 & & -\frac{128}{81}x & +\frac{16}{27}
\end{array}$$

El resultado obtenido se suma algebraicamente al residuo para obtener el polinomio original:

$$2x^5 - 4x^3 - \frac{128}{81}x + \frac{16}{27} + \left(-\frac{358}{81}x + \frac{65}{27}\right) = 2x^5 - 4x^3 - 6x + 3$$

A través de este proceso, los resultados obtenidos de la división original de los polinomios ha sido verificada.

Ciudadanía digital

Puedes verificar el resultado de una división de polinomios haciendo uso de:

https://es.symbolab.com/solver/polynomial-long-division-calculator

Y verificar la factorización de una expresión algebraica mediante:

https://es.symbolab.com/solver/factor-difference-squares-calculator

Ejercicios propuestos

1. Marca con una X a qué tipo de polinomios pertenecen las siguientes expresiones.

Expresión	Ordenado ascendente	Ordenado descendente	Completo	Incompleto
$4x-3$				
$5x^5$				
$-3x^2+5$				
$-6+2x+ex^2-4x^3$				
$x^4+\pi x-2$				

2. Relaciona las expresiones con las descripciones que se muestran:

#	Operación	#	Descripción
1	$3x^2-2x+3$		Cúbica, ascendente y completa.
2	$-6+4x^2-5x^3$		Cuadrática, descendente y completa.
3	$-2+\frac{5}{3}x^2$		Lineal e incompleta.
4	$3{,}2\,x$		Lineal, ascendente y completa.
5	$2-3x+x^2+\pi x^3$		Cúbica, ascendente e incompleta.
6	$1-4x$		Cuadrática, ascendente e incompleta.

3. Dados los siguientes polinomios, realice las operaciones indicadas y verifique sus resultados, como se hizo en el ejercicio resuelto:

$$K(x)=3x-\frac{4}{5}x^2+\frac{2}{3}x^3-6\,,\quad L(x)=-2x+\frac{5}{6}-\frac{3}{2}x^3+\frac{5}{4}x^2,\ M(x)=-\frac{29}{2}x+\frac{41}{6}x^4$$

$$P(x)=2683x^3-\frac{85}{6}x^2+\frac{61}{30}x^5-5-x^6$$

a) $\frac{P(x)}{K(x)}$

b) $\frac{P(x)}{L(x)}$

c) $\frac{M(x)}{K(x)}$

d) $\frac{M(x)}{L(x)}$

e) $\frac{P(x)}{M(x)}$

Respuestas en la página 232

Tema 2
Productos y cocientes notables, el binomio de Newton y factorización

Los productos y cocientes notables son operaciones particulares sistematizadas para el trabajo con polinomios, que permiten realizarlos de manera más eficiente. La factorización es el proceso con el que se expresa un polinomio en sus factores más reducidos. Con base en éstos productos y cocientes, se define la mayoría de los que se conocen como casos de factoreo. A continuación, se presentan las relaciones más importantes que se tienen entre estos procesos:

Tabla 9.
Relaciones entre procesos matemáticos.

	Producto notable	Cociente notable	Factorización	Denominación del caso de factoreo
1	$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	$\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$ ó $\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$	$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$	Diferencia de cuadrados.
2	$(x+d)(x+e)=x^2+(d+e)x+d\times e$		$x^2+(d+e)x+d\times e=(x+d)(x+e)$	Trinomio de la forma x^2+bx+c.
3	$(a+b)(a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b^2-\cdots+ab^{m-2}-b^{m-1})=a^m-b^m$	$\frac{a^m-b^m}{a+b}=(a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b^2-\cdots+ab^{m-2}-b^{m-1})$	$a^m-b^m=(a+b)(a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b^2-\cdots+ab^{m-2}-b^{m-1})$	Diferencia de potencias pares iguales.
4	$(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\cdots+ab^{m-2}+b^{m-1})=a^m-b^m$	$\frac{a^m-b^m}{a-b}=(a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\cdots+ab^{m-2}+b^{m-1})$	$a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\cdots+ab^{m-2}+b^{m-1})$	Diferencia de potencias pares o impares iguales.
5	$(a+b)(a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b^2-\cdots+ab^{m-2}-b^{m-1})=a^m-b^m$	$\frac{a^m-b^m}{a+b}=(a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b^2-\cdots+ab^{m-2}-b^{m-1})$	$a^m-b^m=(a+b)(a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b^2-\cdots+ab^{m-2}-b^{m-1})$	Suma de potencias pares o impares iguales.
6	$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$	$\frac{a^2\pm 2ab+b^2}{a\pm b}=a\pm b$	$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$	Trinomio cuadrado perfecto.

Es importante verbalizar los casos de factoreo que se tiene, para identificarlos cuando se presentan en alguna expresión en particular.

- Diferencia de cuadrados: se presenta cuando se tienen dos términos elevados al cuadrado, que se están restando. Se obtienen dos factores que son la suma y la diferencia de las raíces de los términos de la expresión original.
- Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$: se presenta cuando al ordenar de manera descendente a un polinomio, se tiene un primer término que es un cuadrado perfecto, el segundo término es la multiplicación de un coeficiente (b) por la raíz del primer término de la expresión original y el tercer término es independiente, que únicamente tiene un coeficiente (c). Para los coeficientes b y c debe cumplirse que se puedan obtener un par de números o expresiones d y e que sumados algebraicamente den b y multiplicados, considerando sus signos, den c. Por tanto, se obtiene dos factores que son de la forma $(x + d)(x + e)$. Para la obtención del par de números o expresiones, el primer factor debe tener el signo del 2do término del trinomio original y el segundo factor tendrá como signo la multiplicación de los signos del 2do término con el signo del 3er término del trinomio original.

Para los restantes casos mostrados conviene tener presente las fórmulas dadas en el cuadro presentado. Además, se cuenta con otros casos de factoreo que son importantes y que no tienen una relación directa con los casos de productos y cocientes notables.

- El factor común: es aquel en el que los términos de un polinomio o parte de ellos tienen números o expresiones que sean factores en todos ellos. Estos se agrupan para seguir buscando expresar como factores todo el polinomio original.
- El trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$: se trabaja como una generalización del trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, en la que el polinomio original se multiplica y divide por a, para no alterarlo. Con ello, se llega a $\frac{(ax)^2+b(ax)+\mathrm{a}\times c}{a}$, última expresión a la que se le aplica al numerador el procedimiento explicado para el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, siempre va a poder simplificarse al final del procedimiento el denominador.

- **El binomio de Newton:** Uno de los casos de factoreo que se basa en un producto notable particular son los binomios elevados a la n. Este binomio se desarrolla haciendo uso de dos procedimientos que pueden ser usados de acuerdo con la mayor familiarización que se tenga de ellos o su mayor funcionalidad para la situación que se presente. Estos se detallan a continuación.

    - El triángulo de Pascal: se obtiene los coeficientes del binomio elevado a la n construyendo un triángulo, así:

$(binomio)^n$	Coeficientes	Expresión algebraica
$(a \pm b)^0$	1	1
$(a \pm b)^1$	1 1	$a \pm b$
$(a \pm b)^2$	1 2 1	$a^2 \pm 2ab + b^2$
$(a \pm b)^3$	1 3 3 1	$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$(a \pm b)^4$	1 4 6 4 1	$a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Se observa que al tener el binomio el segundo término con signo negativo, la expresión algebraica tendrá signos alternados, siempre empezando con el primer término positivo.

- Uso de la fórmula del combinatorio: los coeficientes del binomio también se obtienen por medio de esta fórmula, pues un $(binomio)^n$ se puede expresar de la siguiente forma:

$$(a \pm b)^n = a^n \pm \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 \pm \cdots \binom{n}{r-1} a^{n-r+1}b^{r-1} \cdots b^n$$

El término r de la expansión binomial vendrá dado por:

$$\begin{aligned} término\ r &= \binom{n}{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!} a^{n-r+1} b^{r-1} \end{aligned}$$

Nótese que el signo del término expandido será negativo si al tener el binomio el segundo término con signo negativo está elevado a potencia impar.

Ejercicios resueltos

1. Factorar los siguientes polinomios:

a. $10x^2 - 11x - 6$

b. $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

c. $-4x^4 + 9x^2 - 16x^2y^2 - 12xy + 4y^2 - 16y^4$

d. $36x^2 - 88x + 51$

e. $9a^2b^3 - 12ab^3c + 4b^3c^2 - 9b$

Para factorar un polinomio, se debe hacer un proceso de visualización y análisis que lleve al objetivo. Se recomienda hacer un paneo de los casos de factoreo a usar para obtener el polinomio expresado con sus factores, en éste orden:

i. Luego de tener el polinomio ordenado, de manera descendente con respecto de una de sus variables, se procura encontrar factores comunes, ya sea de toda la expresión o de grupos de términos.

ii. Si se tiene un binomio, se debe visualizar si se tiene diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto por adición o sustracción que nos lleve a una diferencia de cuadrados. Si no se presenta ninguno de los casos antes descritos, se hace uso de la fórmula general para encontrar los ceros de una ecuación cuadrática.

i. Luego de tener el polinomio ordenado, de manera descendente con respecto de una de sus variables, se procura encontrar factores comunes, ya sea de toda la expresión o de grupos de términos.

ii. Si se tiene un binomio, se debe visualizar si se tiene diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto por adición o sustracción que nos lleve a una diferencia de cuadrados. Si no se presenta ninguno de los casos antes descritos, se hace uso de la fórmula general para encontrar los ceros de una ecuación cuadrática.

Con todo esto, factoremos:

a. $10x^2 - 11x - 6$

i. Se tiene el polinomio ordenado y se ve que no se cuenta con un factor común en toda la expresión.

ii. Al tratarse de un trinomio, se visualiza que se trata de un trinomio de la forma, por lo que se realiza el procedimiento al respecto:

$$\begin{aligned}(10x^2 - 11x - 6)\left(\frac{10}{10}\right) &= \frac{(10x)^2 - 11(10x) - 60}{10} \\ &= \frac{(10x - 15)(10x + 4\,)}{10} = \frac{5(2x - 3)2(5x + 2\,)}{10} \\ &= (2x - 3)(5x + 2\,)\end{aligned}$$

b. $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

i. Se tiene el polinomio ordenado y se ve que no tenemos factor común en toda la expresión.

ii. atarsAl tre de un tetranomio, se visualiza que se trata de un $(binomio)^n$, puesto que, su primero y último término son cubos perfectos. Se reescribe el polinomio con este objetivo:

$$8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$$
$$= (2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3$$
$$= (2x - 3y)^3$$

c. $-4x^4 + 9x^2 - 16x^2y^2 - 12xy + 4y^2 - 16y^4$

i. Se tiene el polinomio ordenado y se ve que no tenemos factor común en toda la expresión.

ii. Al tratarse de un exanomio, se visualiza que no se trata de un $(binomio)^n$, pero tiene términos que son cuadrados perfectos que agrupándolos convenientemente pueden llevarnos a cumplir con nuestro objetivo de factorar la expresión:

$$-4x^4 + 9x^2 - 16x^2y^2 - 12xy + 4y^2 - 16y^4$$
$$= (9x^2 - 12xy + 4y^2) - (4x^4 + 16x^2y^2 + 16y^4)$$
$$= (3x - 2y)^2 - (2x^2 + 4y^2)^2$$
$$= (3x - 2y - 2x^2 - 4y^2)(3x - 2y + 2x^2 + 4y^2)$$

d. $36x^2 - 88x + 51$

i. Se tiene el polinomio ordenado y se ve que no tenemos factor común en toda la expresión.

ii. Al tratarse de un trinomio, se visualiza que se trata de un trinomio de la forma, pero que se tendría que trabajar con cantidades muy grandes para encontrar el par de números que me permitan factorar. Por este motivo, se emplea la fórmula general de la ecuación cuadrática para hallar los factores, así: $a = 36; \quad \mathrm{b} = -88 \ \mathrm{y} \ \mathrm{c} = 51$, con lo que: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-88) \pm \sqrt{(-88)^2 - 4(36)(51)}}{2(36)} = \frac{(88) \pm \sqrt{400}}{72} = \frac{(88) \pm 20}{72}$

➔ $x_1 = \frac{(88)+20}{72} = \frac{108}{72} = \frac{3}{2}$ → como el valor que hace 0 al trinomio es $\frac{3}{2} \rightarrow su\ factor\ es: 2x - 3$

➔ $x_2 = \frac{(88)-20}{72} = \frac{68}{72} = \frac{17}{18}$ → como el valor que hace 0 al trinomio es $\frac{17}{18} \rightarrow su\ factor\ es: 18x - 17$

$$\therefore 36x^2 - 88x + 51 = (2\mathrm{x} - 3)(18\mathrm{x} - 17)$$

e. $9a^2b^3 - 12ab^3c + 4b^3c^2 - 9b$

i. Se tiene el polinomio ordenado y se identifica un factor común en toda la expresión, dando:
$9a^2b^3 - 12ab^3c + 4b^3c^2 - 9b = b\ (\ 9a^2b^2 - 12ab^2c + 4b^2c^2 - 9)$

ii. Al tratarse de un tetranomio, se visualiza que se puede tener una diferencia de cuadrados formada por un trinomio cuadrado perfecto, puesto que, su primero y tercer término son cuadrados perfectos y su cuarto término, seguido de un signo negativo, también es un cuadrado perfecto. Se reescribe el polinomio con este objetivo:

$$b\ (\ 9a^2b^2 - 12ab^2c + 4b^2c^2 - 9)$$
$$= b[(3ab)^2 - 2(3ab)(bc) + (2bc)^2 - (3)^2]$$
$$= b[(3ab - 2bc)^2 - (3)^2] = b(3ab - 2bc + 3)(3ab - 2bc - 3)$$

2. Encuentra el quinto término de la expresión: $(2x - 3y)^8$

Dado lo que se solicita en el ejercicio, conviene trabajar con la expresión para encontrar el término *r* de una expansión binomial:

$$término\ r = \binom{n}{r-1} a^{n-r+1}b^{r-1}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!} a^{n-r+1}b^{r-1}$$

Por lo tanto, para hallar el quinto término, se tendría que hacer:

$$término\ 5 = \binom{8}{4}(2x)^{8-5+1}(-3y)^{5-1} = \frac{8(7)(6)(5)}{(4)!}(2x)^4(-3y)^4$$
$$= \frac{8(7)(6)(5)}{1(2)(3)(4)}(16x^4)(81y^4) = 90720\ x^4y^4$$

3. Si el séptimo término de una expansión binomial es $17010x^4r^6$, determine el $(binomio)^n$ del que proviene.

Dada la situación planteada, el $(binomio)^n$ será del tipo $(ax \pm br)^n$ Y para resolverla, también conviene usar y analizar la expresión para encontrar el término *r* de una expansión binomial:

$$término\ r = \binom{n}{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!} a^{n-r+1} b^{r-1}$$

Por lo tanto, si el séptimo término es el que está dado, se tendría:

$$término\ 7 = \binom{n}{6} (ax)^{n-7+1} (\pm br)^{7-1}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-7+2)}{(6)!} (ax)^{n-6} (br)^6$$

Dado que se conoce que el exponente de x en el séptimo término es 4, se tiene que:

$$n - 6 = 4, \rightarrow n = 10$$

, por lo que, de la expresión conocida se llega a:

$$= \frac{10(9)(8)(7)}{(6)!} (a)^4 x^4 (b)^6 r^6 = 210(a)^4 x^4 (b)^6 r^6$$

Igualando la expresión dada inicial con la última, se tiene:

$$17010x^4r^6 = 210(a)^4x^4(b)^6r^6 \rightarrow 81 = 3^4 = (a)^4(b)^6 \ \therefore a = 3\ y\ b = 1$$

, por lo que, el $(binomio)^n$ será $(3x \pm r)^{10}$. Vale señalar que, con la información que se cuenta no es posible saber el signo del segundo término en el binomio.

4. En el campo de la economía existen algunas situaciones que son conocidas como puntos de equilibrio; el más común es el que se presenta cuando la función de oferta es igual a la función de demanda. Por ejemplo:

La función de oferta de un producto viene dada como $f(x) = -40x^2 + 51x + 108\ [USD]$ y su función de demanda, $g(x) = 2x^2 - 56x + 120\ [USD]$ con x miles de unidades del producto. Encuentre el punto de equilibrio entre las dos funciones.

Solución:
El punto de equilibrio se obtiene al igualar las funciones de oferta y demanda:

$$-40x^2 + 51x + 108 = 2x^2 - 56x + 120 \rightarrow -42x^2 + 107x - 12 = 0$$

Para resolver la ecuación cuadrática, hagamos uso en esta situación de la fórmula general, por lo que: $a = -42;\quad \mathrm{b} = 107\ \mathrm{y}\ \mathrm{c} = -12$

, con lo que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(107) \pm \sqrt{(107)^2 - 4(-42)(-12)}}{2(-42)}$$
$$= \frac{-107 \pm \sqrt{9433}}{-84} = \frac{-107 \pm 97{,}124}{-84}$$

➔ $x_1 = \frac{-107+97{,}124}{-84} = \frac{-9{,}876}{-84} = 0{,}118$ → $g(x_1) = 2(x_1)^2 - 56x_1 + 120 = 113{,}443$, con lo que el punto de equilibrio sería $(0{,}118; 113{,}443)$, y $x_2 = \frac{-107-97{,}124}{-84} = \frac{-204{,}124}{-84} = 2{,}43$ → $g(x_2) = 2(x_2)^2 - 56x_2 + 120 = -4{,}272$, que es un absurdo, ya que, el precio de un producto no puede ser negativo. Por ello, únicamente se tendrá el punto de equilibrio antes encontrado: $(0{,}118; 113{,}443)$.

5. Otra situación de interés en el campo de la economía es conocer los valores con los que una función de utilidad o de la balanza comercial de un país llega a ser igual a cero. Este cálculo permite indagar posteriormente dónde la función es positiva, que prácticamente viene a ser el objetivo de cualquier emprendimiento o movimiento económico que se realice. A continuación, se presenta un ejemplo.

Dada la siguiente función polinómica: $f(x) = -3x^3 + 12x^2 - 8x + 1$ (en millones de USD) que representa la función de la balanza comercial de un país en los últimos 5 años, considerando al año 0 el inicio del sistema de coordenadas y x el tiempo en años, determine:

- **A.** El valor de la balanza comercial al año 0.
- **B.** Los años en los que la balanza comercial fue cero.
- **C.** Los periodos en los que la balanza comercial ha sido positiva en los últimos 5 años.
- **D.** El intervalo en el que la balanza comercial va a presentar un máximo y el intervalo en el que la balanza comercial va a presentar un mínimo, respectivamente.

Solución:

- **A.** Para encontrar lo solicitado, hay que obtener $f(0) = 1$ (millón de USD)
- **B.** Se debe encontrar los valores de x para los que $f(x) = 0$, dado que, se trata de una función cúbica, que por simple inspección no se ve que sea factorable. De modo que, hay que usar el procedimiento que se conoce como el método de Rufinni, en el que se trabaja únicamente con los coeficientes ordenados de manera descendente. En un principio se trabaja con los factores del término independiente para buscar el valor con el que se va a hacer 0 la función:

x^3	x^2	x	x^0	Valor de prueba	
-3	12	-8	1		Aquí van los resultados de multiplicar los valores de prueba por los nuevos coeficientes que se obtiene.
	-3	9	1		
-3	9	1	2	1	Aquí van los resultados de la suma algebraica de los coeficientes originales con los resultados de la fila anterior.
	-6	12	8		
-3	6	4	9	2	Note que el primer coeficiente no cambia con respecto del original.
	-12	0	-32		
-3	0	-8	-31	4	Hay cambio de signo entre 2 y 4, más cerca de 2 que de 4.
	-9	9	3		
-3	3	1	4	3	Hay cambio de signo entre 3 y 4, más cerca de 3 que de 4.
	-10	20/3	-40/9		
-3	2	-4/3	-31/9	10/3	Hay cambio de signo entre 3 y 10/3, más cerca de 10/3 que de 3.
	-48/5	192/25	-128/125		
-3	12/5	-8/25	-0,024	16/5	Es un valor en el que ya se considera se tiene un 0, puesto que, la función evaluada en ese punto da un valor en centésimas.

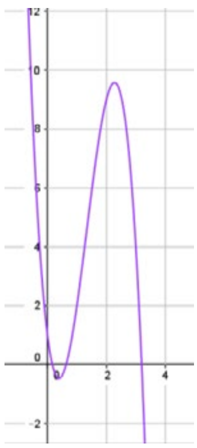
Encontrado el valor que hace 0, queda como cociente la función cuadrática: $-3x^2 + \frac{12}{5}x - \frac{8}{25}$, de la que se puede obtener los valores que la hacen 0, haciendo uso de la fórmula general para las ecuaciones cuadráticas: $a = -3$; $\mathrm{b} = \frac{12}{5}$ y $\mathrm{c} = -\frac{8}{25}$, con lo que: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(\frac{12}{5}) \pm \sqrt{(\frac{12}{5})^2 - 4(-3)(-\frac{8}{25})}}{2(-3)} = \frac{-\frac{12}{5} \pm \sqrt{\frac{48}{25}}}{-6} = \frac{-\frac{12}{5} \pm \frac{4\sqrt{3}}{5}}{-6}$

➔ $x_1 = \frac{-\frac{12}{5} + \frac{4\sqrt{3}}{5}}{-6} = 0{,}169$, y $x_2 = \frac{-\frac{12}{5} - \frac{4\sqrt{3}}{5}}{-6} = 0{,}631$

Por lo tanto, los valores de x años para los que $f(x) = 0$, son: $x_1 = \frac{16}{5}$; $x_2 = 0{,}169$ y $x_3 = 0{,}631$

C. Se puede obtener lo que solicitan en este ítem, ya sea haciendo el esbozo de la gráfica con los resultados antes obtenidos o evaluando en los intervalos que se definen de la función con los resultados antes obtenidos. A continuación, se presenta las 2 maneras, puesto que, puede resultar para alguien más sencillo seguir uno de los 2 procedimientos.

C.1 Dado que se obtuvo los puntos de corte de la función, su gráfica presenta el siguiente esbozo:



La función polinómica que representa la balanza comercial empezaba en el año 0. Por lo que se visualiza en la gráfica, los intervalos en los que será positiva ésta función son: $x \in [0\,;\ 0{,}169[\ \cup\ ]0{,}631\,;16/5[$

C.2 Se puede determinar en qué intervalos va a ser positiva la función evaluándola en valores pertenecientes a dichos intervalos. Así encontramos que para $x \in [0\,;\ 0{,}169[$ la función será positiva, puesto que se evaluó que $f(0) = 1$ y también se encontró que $f(0{,}169) = 0$

Para $x \in]0{,}169\,;0{,}631[$ la función será negativa, puesto que, se evaluó que $f(0{,}5) = -\frac{3}{8}$ y también se encontró que $f(0{,}631) = 0$

Para $x \in]0{,}631\,;16/5[$ la función será positiva, puesto que, se evaluó que $f(2) = 9$ y también se encontró que $f(16/5) = 0$

Finalmente, para $x \in]16/5\,;5]$ la función será negativa, puesto que, se evaluó que $f(4) = -31$ y la función polinómica únicamente modelaba los últimos 5 años de la balanza comercial.

D. Para responder a la inquietud planteada en éste ítem, por el momento únicamente es posible hacerlo visualizando el esbozo de la gráfica, y en ella se encuentra que la balanza comercial va a presentar un máximo en el intervalo: $x \in]0{,}631\,;16/5[$ y va a presentar un mínimo en el intervalo: $x \in]0{,}169\,;0{,}631[$

Ejercicios propuestos

1. Factora los siguientes polinomios:

a. $4x^2 + 20x + 16$

b. $12x^3 - 44x^2 + 51x - 18$

c. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

d. $x^3 - 6x^2 + 9{,}5x - 2$

2. Reduzca a su mínima expresión:

a. $\frac{x^2-x}{x^3-x^2+x-1}$

b. $\frac{125x^6y^9-343x^3y^6}{xy^2(5xy-7)}$

3. Encuentre el mínimo común múltiplo (MCM) y el máximo común divisor (MCD) de los siguientes polinomios:

$3x^2 - 10x + 8$
$2x^2 - 7x + 6$
$12x^4 - 76x^3 + 179x^2 - 186x + 72$

4. Encuentra el octavo término de la expresión: $(3x - \mathrm{r})^{10}$

5. Si el sexto término de una expansión binomial es $-108864x^3y^5$, determina el $(binomio)^n$ del que proviene. La función de oferta de un producto viene dada por $f(x) = 2x + 15\ [USD]$, y su función de demanda POR $g(x) = \frac{385}{x+1}\ [USD]$ con x miles de unidades del producto. Encuentre el punto de equilibrio entre las dos funciones.

6. La función de ingresos por la venta de un producto viene dada por $f(x) = x^3 - 12x^2 + 15x\ [en\ diez\ miles\ de\ USD]$ y su función de costos $g(x) = \frac{5}{4}x + 2\ [en\ diez\ miles\ de\ USD]$ con x miles de unidades del producto. Encuentre el(los) punto(s) de equilibrio entre las dos funciones.

7. La función de ingresos por la venta de un producto viene dada por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x\ [en\ diez\ miles\ de\ USD]$ y su función de costos $g(x) = \frac{3}{2}x + 2\ [en\ diez\ miles\ de\ USD]$ con x miles de unidades del producto. Encuentre el(los) punto(s) de equilibrio entre las dos funciones.

8. Dada la siguiente función polinómica $f = -6x^3 + 31x^2 - 45x + 18$ (en millones de USD), que representa la función de la balanza comercial de un país en los últimos 5 años, considerando al año 0 el inicio del sistema de coordenadas y a x el tiempo en años, determine:

A. El valor de la balanza comercial al año 0.
B. Los años en los que la balanza comercial fue de cero.
C. Los periodos en los que la balanza comercial ha sido positiva en los últimos 5 años.
D. El intervalo en el que la balanza comercial va a presentar un máximo y el intervalo en el que la balanza comercial va a presentar un mínimo, respectivamente.

9. La función dada representa las ganancias (en miles de USD) de una fábrica, en función de la cantidad (x, en miles) de producto que vende:

$$f(x) = 12x^3 - 44x^2 + 51x - 18,$$

determine:

A. La cantidad x para los que la ganancia fue de cero.
B. Los intervalos de x en los que la ganancia ha sido positiva.

Respuestas en la página 233

Interdisciplinariedad

La determinación de los valores que hacen 0 a una función, puntos de corte con el eje de las x y los análisis de positividad y negatividad de una función tienen una importancia fundamental para todo tipo de funciones que se usen, de acuerdo a la situación que modelen. Así, si la función representa los cambios en los precios de la bolsa de un producto, la positividad representaría que hay un crecimiento en el precio en el mercado de las acciones de un producto, la negatividad representaría que hay un decrecimiento en el precio en el mercado de las acciones de un producto y el valor 0 que las acciones se mantendrían sin cambios.

Capítulo 05

Fracciones Algebraicas

Figura 9.
Alumnos resolviendo operaciones con fracciones algebraicas tanto en el pizarrón como en sus cuadernos de trabajo.

Nota. Trabajo en equipo. Tomada de Freepik 2024, https://n9.cl/2cwm8h

En el ámbito económico, las fracciones algebraicas, la racionalización y las fracciones parciales desempeñan un papel crucial en el análisis y modelado de relaciones financieras complejas. Las fracciones algebraicas permiten representar relaciones variables entre costos, ingresos y utilidades, mientras que la racionalización simplifica expresiones que surgen en el cálculo de tasas de interés o rendimientos financieros. Por otro lado, las fracciones parciales son esenciales para descomponer expresiones complejas en formas más manejables, utilizadas en la resolución de ecuaciones diferenciales y la optimización de decisiones económicas. Estas herramientas matemáticas permiten a los economistas comprender mejor los sistemas económicos modernos y tomar decisiones informadas en áreas como la inversión, planificación financiera y gestión de riesgos.

¿Qué otras aplicaciones de las fracciones algebraicas conoces?

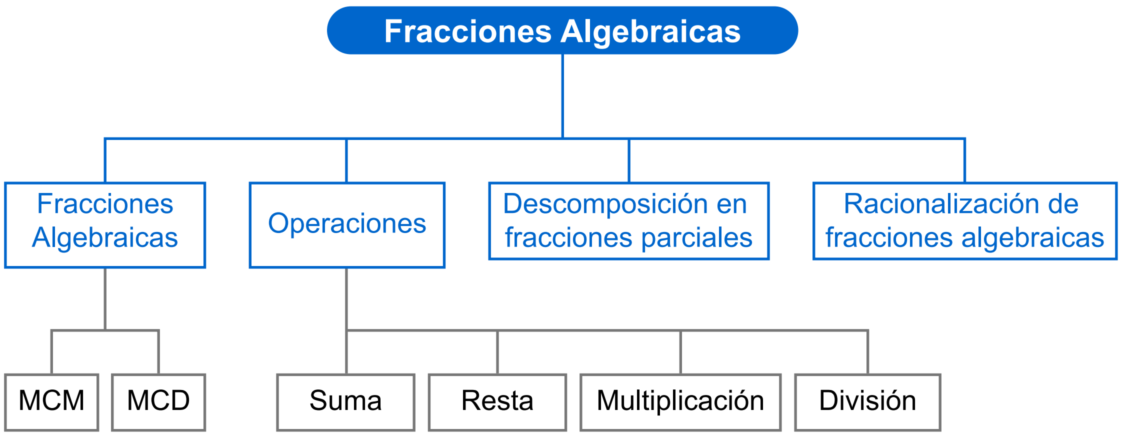
Objetivos de unidad

1. Determinar el MCM y MCD de fracciones algebráicas, utilizando diferentes métodos, para la resolución de ejercicios de simplificación de expresiones algebraicas.

2. Realizar operaciones con fracciones simples y complejas, usando propiedades fundamentales, para la resolución de problemas aplicados a la economía.

3. Descomponer en fracciones parciales y racionalizar fracciones, utilizando diferentes técnicas, para la interiorización de bases sólidas para la materia de cálculo diferencial e integral de cursos superiores.

Figura 10.
Temas a trabajar.



Tema 1
Fracciones algebraicas, MCM y MCD

Definición de fracción algebraica:

Una fracción algebraica es el cociente de dos polinomios y se representa por:

$$\frac{N(x)}{D(x)} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Polinomio del numerador} \\ \longrightarrow \text{Polinomio del denominador} \end{array}$$

Se debe cumplir que el polinomio $D(x)$ debe ser diferente de cero y no debe ser una constante.

Las fracciones algebraicas pueden ser propias o impropias. Si el polinomio del numerador $N(x)$ tiene menor grado que el polinomio del denominador $D(x)$, se trata de una fracción propia. Mientras que si polinomio del numerador $N(x)$ tiene mayor o igual grado que el polinomio del denominador $D(x)$, se trata de una fracción impropia.

Equivalencia de fracciones algebraicas

Fracciones equivalentes:

Para denotar equivalencia entre las fracciones $\frac{A(x)}{B(x)}$; $\frac{C(x)}{D(x)}$, se utiliza $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x)}{D(x)}$, y se cumple que $A(x)D(x) = C(x)B(x)$.

Por ejemplo, consideremos las fracciones algebraicas $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$ y $\frac{x+1}{x+2}$. A primera vista, estas fracciones parecen diferentes, pero si simplificamos la primera fracción, veremos que son equivalentes:

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x-1)}=\frac{x+1}{x+2}$$

Por lo tanto $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$ y $\frac{x+1}{x+2}$ son equivalentes, entonces, $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\frac{x+1}{x+2}$

Tabla 10.
Propiedades de las fracciones algebraicas.

$\frac{A(x)}{B(x)}=+\frac{+A(x)}{+B(x)}=+\frac{-A(x)}{-B(x)}=-\frac{-A(x)}{+B(x)}-=\frac{+A(x)}{-B(x)}$	Una fracción algebraica tiene 3 signos: de la fracción, del numerador y del denominador.
$\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{A(x)P(x)}{B(x)P(x)};\quad P(x)\neq 0$	Al multiplicar el numerador y denominador de una fracción algebraica por un polinomio no nulo, se obtiene fracciones equivalentes.
$\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{A(x)\div P(x)}{B(x)\div P(x)};\quad P(x)\neq 0$	Al dividir el numerador y denominador de una fracción algebraica por un polinomio no nulo, se obtiene fracciones equivalentes.

MCD y MCM

Definición MCD: el máximo común divisor de dos o más expresiones algebraicas es la expresión que comparten todas las expresiones dadas, teniendo el mayor grado y coeficiente numérico posible.

Definición MCM: el mínimo común múltiplo de dos o más expresiones algebraicas enteras es la expresión algebraica entera más pequeña y con el menor coeficiente que contiene todas y cada una de las expresiones dadas de manera exacta

Para encontrar el MCD o MCM de dos o más fracciones algebraicas, primero se necesita factorizar completamente las expresiones algebraicas en términos de factores irreducibles. Luego el MCD será la expresión algebraica formada por el producto de los factores comunes a las expresiones, tomados con la menor potencia, y el MCM será formado por el producto de los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

La Tabla 11 determina el MCD dados los polinomios $A = x^5 - a^4x$ y $B = (x^2 - a^2)\,(x^4 - a^4)$

Tabla 11.
Pasos para determinar el MCD.

Paso	Expresiones algebraicas	
Se descompone cada uno de los polinomios en términos irreducibles.	$A = x^5 - a^4x$ $A = x(x^4 - a^4)$ $A = x(x^2 + a^2)(x^2 - a^2)$ $A = x(x^2 + a^2)(x + a)(x - a)$	$B = (x^2 - a^2)\,(x^4 - a^4)$ $B = (x + a)(x - a)(x^2 + a^2)(x^2 - a^2)$ $B = (x + a)^2(x - a)^2(x^2 + a^2)$
Se toma los términos repetidos con el menor exponente y se tiene el MCD.	$MCD = (x^2 + a^2)(x + a)(x - a)$	
Se toma los términos no repetidos y repetidos con el mayor exponente y se tiene el MCM.	$mcm = x\,(x^2 + a^2)(x + a)^2(x - a)^2$	

Ejercicios resueltos

1. Identificar si las siguientes expresiones son fracciones algebraicas propias, impropias o no son fracciones algebraicas.

$\frac{y^7+y^2+3}{2y+5}$	Sí es una fracción algebraica y, debido a que el grado del polinomio del numerador es mayor al grado del polinomio del denominador, entonces es impropia.
$\frac{x^2-3x+5}{3x^3+x+1}$	Sí es una fracción algebraica y, debido a que el grado del polinomio del numerador es menor al grado del polinomio del denominador, es propia.
$\frac{t^3+5t-1}{t^3+2}$	Sí es una fracción algebraica, además, debido a que el grado del polinomio del numerador es igual al grado del polinomio del denominador, es impropia.
$\frac{a^2b+abc}{2}$	No es fracción algebraica, ya que, el denominador es una constante.
$\frac{\sqrt{5x^3}-2y}{x+1}$	No es fracción algebraica, ya que, el numerador no es un polinomio debido a que contiene un término irracional.

2. Determine el MCM de las siguientes expresiones:

$A = 3x^3 - 15x^2y$
$B = 9x^4 + 18x^3y$

Solución:
Es necesario factorizar las expresiones de A y B, obteniéndose:

$A = 3x^2(x-5y) \qquad B = 9x^3(x+2y)$

Se toma los términos no repetidos y repetidos con el mayor exponente y se tiene el MCM dado por: $9x^3(x-5y)(x+2y)$.

3. Determine el MCD de los polinomios:

$P(t) = at^2 + (a+1)^2 t + a + 2 \qquad Q(t) = (t+a)(t-a) - 4(a+1)$

Solución:
Factorizando los polinomios se obtiene:

$$P(t) = \frac{(at + a^2 + 2a)(at+1)}{a} = (t+a+2)(at+1)$$
$$Q(t) = t^2 - a^2 - 4a - 4 = t^2 - (a^2 + 4a + 4) = t^2 - (a+2)^2$$
$$= (t-a-2)(t+a+2)$$

Se toma los términos repetidos con el menor exponente y se tiene el MCD dado por: $(t+a+2)$

4. Determine el MCM y MCD de las siguientes expresiones:

$A = 2x^3 + x^2 - 3x \quad B = x^2y - x + xy \quad C = 2x^2 + 2xy + 3x + 3y$

Solución:
Necesitamos factorizar las expresiones anteriores, entonces se obtiene:

$$A = x(2x^2 + x - 3) = x(2x+3)(x-1)$$
$$B = x(xy - 1 + y)$$
$$C = 2x(x+y) + 3(x+y) = (x+y)(2x+3)$$

Se toma los términos repetidos con el menor exponente y se tiene el MCD dado por 1.

Se toma los términos no repetidos y repetidos con el mayor exponente y se tiene el MCM dado por $x(2x+3)(x-1)(x+y)(xy-1+y)$.

Ejercicios propuestos

1. Determinar el MCM de:

$$P(x, y, z) = 2x^7yz^4$$
$$Q(x, y, z) = 6x^3y^5z^2$$

Respuestas en la página 234

Tema 2

Operaciones: suma, resta, multiplicación y división

Las operaciones con fracciones algebraicas son una extensión de las operaciones aritméticas básicas, pero con expresiones algebraicas en lugar de números. Involucran sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones que contienen variables. Para realizar estas operaciones, es crucial encontrar denominadores comunes, simplificar cuando sea posible y seguir las reglas básicas del álgebra. Estas operaciones son fundamentales y útiles en una variedad de contextos matemáticos y aplicaciones prácticas, más aún en la economía.

Tabla 12.
Suma y resta de fracciones algebraicas.

Con el mismo denominador	$\frac{\boldsymbol{A(x)}}{\boldsymbol{D(x)}} \pm \frac{\boldsymbol{B(x)}}{\boldsymbol{D(x)}} = \frac{\boldsymbol{A(x)} \pm \boldsymbol{B(x)}}{\boldsymbol{D(x)}}$	Se mantiene el polinomio denominador y simplemente se suma o resta los numeradores.
Con distinto denominador	$\frac{\boldsymbol{A(x)}}{\boldsymbol{B(x)}} \pm \frac{\boldsymbol{C(x)}}{\boldsymbol{D(x)}} =$ $\frac{\boldsymbol{A(x)D(x)} \pm \boldsymbol{C(x)B(x)}}{\boldsymbol{B(x)D(x)}}$	Todas las fracciones algebraicas deben ser transformada en fracciones equivalentes que tengan un denominador común que será el denominador de la fracción resultante, luego se suma o resta los numerados. Para dos fracciones se utiliza una multiplicación en cruz, para más de dos fracciones el denominador común es el mínimo común múltiplo.

Ejemplo con el mismo denominador:

$$\frac{x-1}{x+3}+\frac{x}{x+3}-\frac{x^2+5}{x+3}=\frac{x-1+x-(x^2+5)}{x+3}=\frac{x-1+x-x^2-5}{x+3}$$
$$=\frac{-x^2+2x-6}{x+3}$$

Ejemplo con distinto denominador:

$$\frac{x-1}{x-3}+\frac{x+1}{x+2}=\frac{(x-1)(x+2)+(x+1)(x-3)}{(x-3)(x+2)}=\frac{x^2+x-2+x^2-2x-3}{(x-3)(x+2)}$$
$$=\frac{2x^2-x-5}{(x-3)(x+2)}$$

Multiplicación de fracciones algebraicas

Para multiplicar fracciones algebraicas, se multiplica entre si todos los numeradores e igualmente todos los denominadores.

$$\frac{A(x)}{B(x)}\times\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{A(x)\times C(x)}{B(x)\times D(x)}$$

A continuación, se realiza una multiplicación de las fracciones algebraicas $\frac{2}{y}\times\frac{3y^2+4y}{y^2-2}\times\frac{4y^2-8}{3y+4}$

$$\frac{2}{y}\times\frac{3y^2+4y}{y^2-2}\times\frac{4y^2-8}{3y+4}=\frac{2}{y}\times\frac{y(3y+4)}{y^2-2}\times\frac{4(y^2-2)}{3y+4}=\frac{2}{1}\times\frac{1}{1}\times\frac{4}{1}=8$$

Como se puede apreciar el ejemplo anterior, en ocasiones es conveniente factorizar tanto numerador como denominador de las fracciones algebraicas, para realizar una simplificación previa entre cualquier numerador y cualquier denominador, antes de multiplicar entre si todos los numeradores y denominadores.

División de fracciones algebraicas

Para dividir fracciones algebraicas, se invierte la fracción que esta como divisor, convirtiéndose en una multiplicación de fracciones algebraicas, para luego proceder como en el caso anterior.

$$\frac{A(x)}{B(x)} \div \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} \times \frac{D(x)}{C(x)} = \frac{A(x) \times D(x)}{B(x) \times C(x)}$$

A continuación, se realiza la división de estas fracciones algebraicas $\frac{x^2-2x}{x^2+5x+6} \div \frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

$$\frac{x^2-2x}{x^2+5x+6} \div \frac{x^2-4}{x^2+4x+4} = \frac{x^2-2x}{x^2+5x+6} \times \frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$$
$$= \frac{x(x-2)}{(x+3)(x+2)} \times \frac{(x+2)^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{x}{x+3}$$

Ejercicios resueltos

1. Realice la siguiente operación y presente su resultado de la forma más simplificada:

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

Solución:

Se procede a aplicar las propiedades de las fracciones algebraicas para de este modo cambiar el signo de varios factores del denominador de las fracciones presentes en el problema. Entonces, se obtiene:

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} - \frac{b}{(b-c)(a-b)} + \frac{c}{(a-c)(b-c)}$$

En la expresión anterior el mínimo común múltiplo es $(a-b)(b-c)(a-c)$, entonces podemos decir que:

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)}-\frac{b}{(b-c)(a-b)}+\frac{c}{(a-c)(b-c)}$$
$$=\frac{a(b-c)-b(a-c)+c(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=$$

Desarrollando las operaciones del numerador y simplificando:

$$=\frac{ab-ac-ab+bc+ac-bc}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\frac{0}{(a-b)(b-c)(a-c)}=0$$

De ahí que, se concluye que la expresión simplificada es 0.

2. Simplifique las siguientes expresiones:

$$\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right)$$

Solución: Se procede realizando la suma y resta de fracciones que se encuentran dentro de cada paréntesis.

$$\left[\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1-x)(1+x)}\right]\left(\frac{3+x^2-4x^2}{4x}\right)$$

Utilizando identidades de Legendre en $(1+x)^2-(1-x)^2=4x$, y simplificando $3+x^2-4x^2=3(1-x^2)$, entonces:

$$\left[\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1-x)(1+x)}\right]\left(\frac{3+x^2-4x^2}{4x}\right)=\frac{4x}{(1-x)(1+x)}\times\frac{3(1-x^2)}{4x}$$

Simplificando la expresión anterior se obtiene que $\frac{4x}{(1-x)(1+x)}\times\frac{3(1-x^2)}{4x}=3$

Ahora se procede con la simplificación de la expresión b

$$b=\frac{x+2}{3x-1}+\frac{x+1}{3-2x}+\frac{4x^2+6x+3}{6x^2-11x+3}=\frac{x+2}{3x-1}+\frac{x+1}{3-2x}+\frac{4x^2+6x+3}{(3x-1)(2x-3)}$$
$$=\frac{2x^2-3x+4x-6-(3x^2-x+3x-1)+4x^2+6x+3}{(3x-1)(2x-3)}$$
$$=\frac{3x^2+5x-2}{(3x-1)(2x-3)}$$

Utilizando las expresiones simplificadas, se procede con el cálculo de $b(2a-3)-a$:

$$b(2a-3)-a=\frac{3x^2+5x-2}{(3x-1)(2x-3)}(2x-3)-x$$

La expresión se simplifica mediante las respectivas propiedades:

$$\frac{3x^2+5x-2}{(3x-1)(2x-3)}(2x-3)-x=\frac{3x^2+5x-2}{(3x-1)}-x$$
$$=\frac{3x^2+5x-2-3x^2+x}{3x-1}=\frac{6x-2}{3x-1}$$

Entonces:

$$\frac{6x-2}{3x-1}=\frac{2(3x-1)}{3x-1}=2$$

Ejercicios propuestos

Simplifique las siguientes fracciones:

1. $\frac{xz+yz+xw+yw}{x^2+xy}$

2. $\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\right)\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}+1\right)\frac{ab}{a^2+b^2}$

3. $\frac{2x^2-5x+3}{1-x}$

4. $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3} \times \frac{3-x}{3+x}$

5. $\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\left(1+\frac{x}{y-x}\right)$

6. $\frac{\frac{x}{x-2}-\frac{3}{x^2-4}}{\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6} \times \frac{x^2-3x-18}{x^2-8x+12}}$

Respuestas en la página 234

Tema 3
Descomposición en fracciones parciales

Las fracciones parciales son fracciones simples cuya suma o resta da como resultado una fracción compleja. Se descompone en fracciones parciales, ya que, estas fracciones son más fáciles de manipular, por ejemplo, al momento de realizar una integral.

Si se tiene una fracción $\frac{N(x)}{D(x)}$, para obtener fracciones parciales se realiza los siguientes pasos:

1. Revisión de grados del numerador y del denominador: se verifica que el grado del numerador sea menor que el grado del denominador. Si esto se cumple se continúa al paso 2, caso contrario se realiza la división del numerador para el denominador quedando una ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

2. Factorización del denominador: Se obtiene los factores irreducibles del denominador.
3. Determinación de las fracciones parciales: Se crea fracciones dependiendo de los factores que se tiene en el denominador.

Tabla 13.
Casos para la creación de fracciones parciales.

Casos	Forma	Fracciones Parciales
Denominador lineal	$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{N(x)}{(a_0x+b_0)(a_1x+b_1)(a_2x+b_3)\ldots}$	$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{(a_0x+b_0)} + \frac{B}{(a_1x+b_1)} + \cdots..$
Denominador lineal repetido	$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{N(x)}{(a_0x+b_0)(a_1x+b_1)^2}$	$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{(a_0x+b_0)} + \frac{B}{(a_1x+b_1)} + \frac{C}{(a_1x+b_1)^2}$
Denominador cuadrático irreducible	$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{N(x)}{(a_1x^2+b_1)}$	$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{Ax+B}{(a_1x^2+b_1)}$
Denominador cuadrático repetido	$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{N(x)}{(a_1x^2+b_1)^3}$	$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{Ax+B}{(a_1x^2+b_1)} + \frac{Cx+D}{(a_1x^2+b_1)^2} + \frac{Ex+F}{(a_1x^2+b_1)^3}$

Como se observa en la tabla anterior, en el numerador se coloca un polinomio de un grado menor que el polinomio denominador con coeficientes desconocidos.

4. Encontrar los coeficientes desconocidos.

Ciudadanía digital

Para verificar la resolución del ejercicio ingresar a Wolfram Alpha mediante el siguiente enlace:

https://tinyurl.com/2dm7lek3

Ejercicios Resueltos

1. Descomponga en fracciones parciales:

$$\frac{4x-2}{2x^2+x-15}$$

Solución:
Se procede a factorizar el denominador, entonces:

$$\frac{4x-2}{2x^2+x-15}=\frac{4x-2}{(2x-5)(x+3)}$$

De acuerdo al tipo de denominador de la fracción, que es el caso de denominadores lineales sin repetición, se puede expresar las siguientes fracciones parciales:

$$\frac{4x-2}{(2x-5)(x+3)}=\frac{A}{2x-5}+\frac{B}{x+3}$$

Las fracciones de la derecha se operan para obtener una sola fracción:

$$\frac{4x-2}{2x^2+x-15}=\frac{A(x+3)+B(2x-5)}{(2x-5)(x+3)}$$

Al ser dos expresiones equivalentes, entonces los numeradores deben ser iguales:

$$4x-2=A(x+3)+B(2x-5)$$

Se procede a evaluar los polinomios con valores adecuados de la variable, de tal modo que se obtiene los valores de los coeficientes desconocidos, entonces

Si $x = -3$, entonces:
$4(-3) - 2 = A(-3 + 3) + B(2(-3) - 5)$

De donde $B = \frac{14}{11}$

Si $x = \frac{5}{2}$, entonces:
$4\left(\frac{5}{2}\right) - 2 = A\left(\frac{5}{2} + 3\right) + B\left(2\left(\frac{5}{2}\right) - 5\right)$

De donde $A = \frac{16}{11}$

Por lo tanto:

$$\frac{4x - 2}{(2x - 5)(x + 3)} = \frac{\frac{16}{11}}{2x - 5} + \frac{\frac{14}{11}}{x + 3} = \frac{16}{11(2x - 5)} + \frac{14}{11(x + 3)}$$
$$= \frac{16}{22x - 55} + \frac{14}{11x + 33}$$

2. Descomponga en fracciones más simples la siguiente fracción.

$$\frac{ax^2(2x + 3) + a(6x + 1)}{2x^2 + 5x + 3}$$

Solución:
Se comienza desarrollando las operaciones del denominador:

$$\frac{ax^2(2x + 3) + a(6x + 1)}{2x^2 + 5x + 3} = \frac{2ax^3 + 3ax^2 + 6ax + a}{2x^2 + 5x + 3}$$

Debido a que la fracción es impropia, se realiza la división del numerador para el denominador:

$$\frac{2ax^3 + 3ax^2 + 6ax + a}{2x^2 + 5x + 3} = ax - a + \frac{8ax + 4a}{2x^2 + 5x + 3}$$

A continuación, se procede con la parte de la fracción que es propia para el cálculo de las fracciones parciales:

$$\frac{8ax + 4a}{2x^2 + 5x + 3}$$

Se procede a factorizar el denominador:

$$\frac{8ax + 4a}{2x^2 + 5x + 3} = \frac{8ax + 4a}{(2x + 3)(x + 1)}$$

De acuerdo al tipo de denominador de la fracción, que es el caso de denominadores lineales sin repetición, se puede expresar las siguientes fracciones parciales:

$$\frac{8ax + 4a}{(2x + 3)(x + 1)} = \frac{A}{(2x + 3)} + \frac{B}{(x + 1)}$$

Las fracciones de la derecha se operan para obtener una sola fracción:

$$\frac{8ax + 4a}{(2x + 3)(x + 1)} = \frac{A(x + 1) + B(2x + 3)}{(2x + 3)(x + 1)}$$

Al ser dos expresiones equivalentes, entonces los numeradores deben ser iguales:

$$8ax + 4a = A(x + 1) + B(2x + 3)$$

Se desarrolla el miembro de la derecha de la igualdad anterior:

$$8ax + 4a = Ax + A + 2Bx + 3B$$

$$8ax + 4a = (A + 2B)x + A + 3B$$

Utilizando igualdad de polinomios, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones que tiene por incógnitas los coeficientes desconocidos A y B:

$$\begin{cases} 8a = A + 2B \\ 4a = A + 3B \end{cases}$$

Tras resolver el sistema de ecuaciones anterior, se obtiene los siguientes valores de los coeficientes desconocidos:

$A = 16a$
$b = -4a$

Por lo tanto:

$$\frac{2ax^3 + 3ax^2 + 6ax + a}{2x^2 + 5x + 3} = ax - a + \frac{16a}{(2x+3)} - \frac{4a}{(x+1)}$$

Ejercicios Propuestos

Descomponer en fracciones parciales:

1. $\frac{1}{(x+5)(x+4)}$

2. $\frac{x+7}{x^2+3x+2}$

3. $\frac{x-6}{x^2-1}$

4. $\frac{7x+18}{x^2+6x+5}$

5. Suponga que la función de costo total $TC(x)$ de una empresa está dada por:

$$TC(x) = \frac{5x^2 + 15x + 20}{(x+2)^2}$$

Descomponer esta función en fracciones parciales para analizarla mejor.

6. Suponga que la función ingreso total $TR(x)$ de una empresa está dada por:

$$TR(x) = \frac{3x^2 + 7x + 2}{(x+3)(x-1)}$$

Descomponer esta función en fracciones parciales para entender mejor su comportamiento.

Respuestas en la página 234

Tema 4
Racionalización de fracciones algebraicas.

La racionalización es una técnica esencial para simplificar radicales en aquellas expresiones que involucran raíces. Tiene una gran aplicación en fracciones algebraicas, ya que, simplifica los radicales tanto del numerador como del denominador.

Para conseguir la eliminación del radical se utiliza un factor que es conocido como factor racionalizante (FR). La aplicación de la racionalización más habitual es cuando el denominador de la fracción algebraica contiene raíces. En la siguiente tabla se resume los casos más comunes:

Tabla 14.
Casos más importantes de racionalización.

Forma del denominador de la fracción algebraica	Factor racionalizante	Denominador luego de la eliminación del radical
$\sqrt[n]{a^m}, n > m$	$\sqrt[n]{a^{n-m}}$	a
$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$a - b$
$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$a - b$
$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$	$a + b$
$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$	$a - b$

Si el denominador es un binomio o polinomio de la forma:

$$\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \cdots + \sqrt[n]{b^{n-1}}$$

$$\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \cdots - \sqrt[n]{b^{n-1}}$$

Se puede utilizar los siguientes productos, en donde uno de los factores será el factor racionalizante del otro:

Para todo valor de n	$\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\cdots+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)=a-b$
Cuando n es impar	$\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\cdots+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)=a+b$
Cuando n es par	$\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\cdots-\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)=a-b$

Ejercicios Resueltos

1. Racionalice la siguiente expresión:

$$E=\frac{x}{\sqrt[3]{16a^7bc^2d^4}}$$

Solución:

Como primer paso, se simplifica los radicales:

$$E=\frac{x}{\sqrt[3]{16a^7bc^2d^4}}=\frac{x}{\sqrt[3]{2\cdot 8\cdot a^6abc^2d^3d}}=\frac{x}{2a^2d\sqrt[3]{2abc^2d}}$$

Con el uso de las tablas anteriores, se expresa el factor racionalizante:

$$FR=\sqrt[3]{2^2a^2b^2cd^2}$$

Multiplicando y dividiendo para el factor racionalizante, entonces:

$$\frac{x}{2a^2d\sqrt[3]{2abc^2d}}\frac{FR}{FR}=\frac{xFR}{2a^2d^32abcd}=\frac{xFR}{2a^3bcd^3}$$

De ahí que:

$$\frac{xFR}{2a^3bcd^3}=\frac{x\sqrt[3]{2^2a^2b^2cd^2}}{2a^3bcd^3}$$

De este modo, se obtiene la expresión luego de ser racionalizada:

$$\frac{x\sqrt[3]{2^2a^2b^2cd^2}}{2a^3bcd^3}$$

2. Simplifique la expresión:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

Solución:
Antes de realizar la suma de fracciones, es conveniente racionalizar cada una de las fracciones:

$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ Tiene el siguiente factor racionalizante: $FR_1 = \sqrt{3}-\sqrt{2}$, entonces:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\frac{FR_1}{FR_1}=\frac{FR_1}{3-2}=FR_1=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

Ahora bien, $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ Tiene el factor racionalizante $FR_2 = 2-\sqrt{3}$, entonces:

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}\frac{FR_2}{FR_2}=\frac{FR_2}{4-3}=FR_2=2-\sqrt{3}$$

Finalmente $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ tiene el factor racionalizante $FR_3 = \sqrt{5}+\sqrt{2}$, entonces:

$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\frac{FR_3}{FR_3}=\frac{3FR_3}{5-2}=FR_3=\sqrt{5}+\sqrt{2}$$

Reemplazando las fracciones ya racionalizadas, se obtiene que:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{2}=2+\sqrt{5}$$

3. Racionalice la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}$$

Solución:
En este caso, todos los radicales ya se encuentran simplificados. Utilizando las tablas de los contenidos, se define que se trata de un denominador que tiene la forma $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$, por lo que el factor racionalizante sugerido es $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$, con los valores del ejemplo, entonces:

$$FR=\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3^2}$$

Se multiplica y divide para el factor racionalizante:

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}\frac{FR}{FR}=\frac{\sqrt[3]{3}FR}{2-3}=-\sqrt[3]{3}FR$$

Se reemplaza el factor racionalizante:

$$-\sqrt[3]{3}FR=-\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3^2}\right)$$

Se realiza simplificaciones adecuadas:

$$-\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3^2}\right)=-\sqrt[3]{3\times 2^2}-\sqrt[3]{3\times 6}-\sqrt[3]{3\times 3^2}$$
$$=-\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{18}-3$$

De ahí que, la expresión racionalizada es:

$$-\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{18}-3$$

Ejercicios Propuestos

Racionalice las siguientes expresiones:

1. $F = \frac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

2. $M = \frac{2}{\sqrt[3]{5}-1}$

3. $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

4. $P = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{2\sqrt{a}+\sqrt{x}}$

5. $Q = \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

6. $B = \frac{\sqrt[3]{x}+4\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{xy}+4\sqrt[3]{y^2}}$

7. $T = \frac{4}{3+\sqrt{3}-\sqrt{9}}$

8. $W = \frac{3+4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

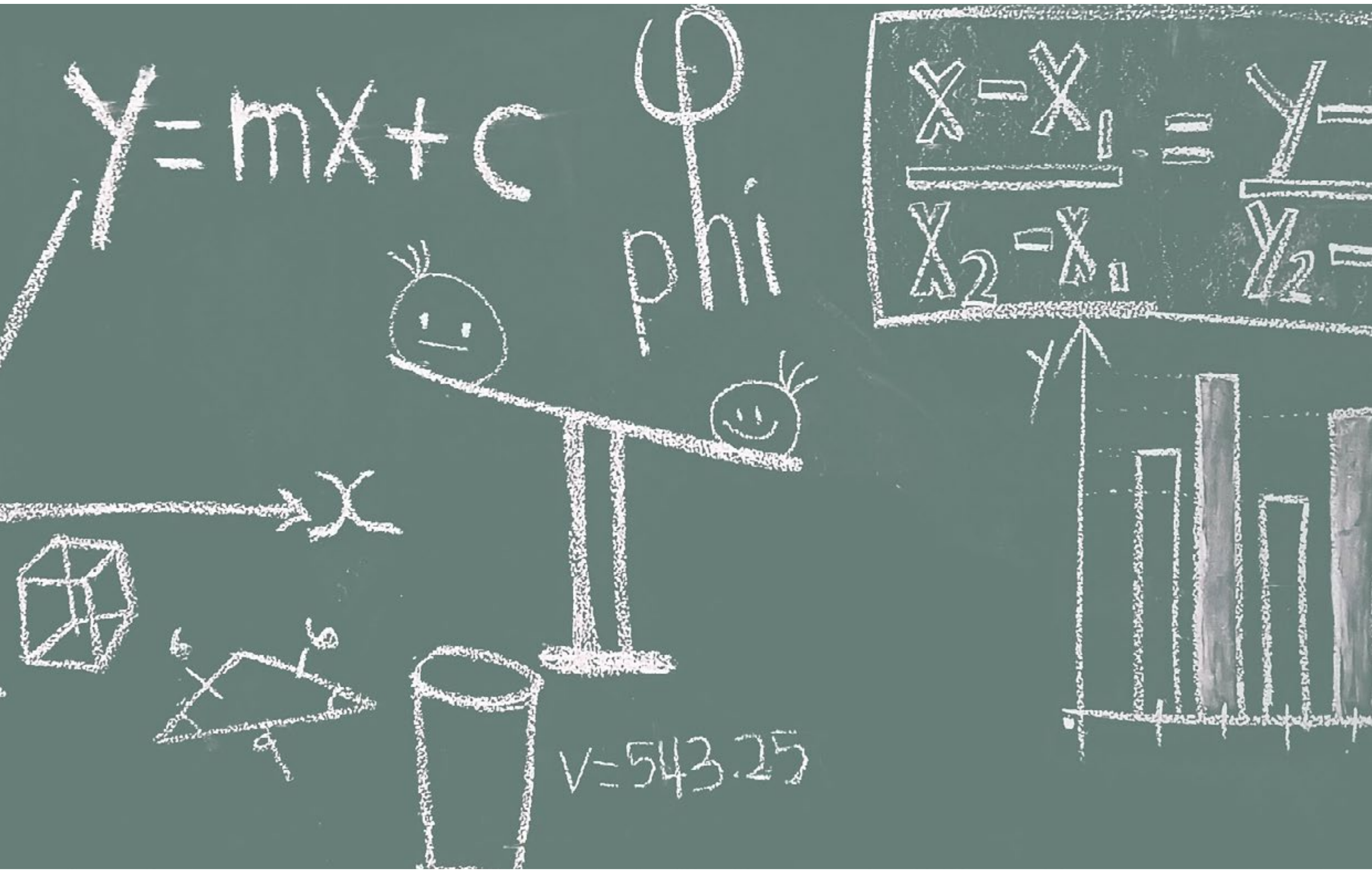
9. En el siguiente ejercicio racionalice el numerador e indique cual es la expresión resultante:
$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$$

Respuestas en la página 234

Capítulo 06

Ecuaciones y sistemas de ecuaciones de primer grado

Figura 11.
Distintas situaciones en las que se tiene ecuaciones lineales



Nota. Tomado de Matemáticas, pizarra, educación. Pixabay, 2024, https://tinyurl.com/29hfrfd4

El nacimiento de las ecuaciones data del siglo XVII a.C. con los matemáticos de Mesopotamia y Babilonia. Para el siglo XVI a.C., los matemáticos egipcios implementan un álgebra muy elemental que usaron para resolver problemas que tenían que ver con la distribución de víveres, cosecha y materiales. El apogeo de esta cultura se dio por el año 2500 a.C., hasta su conquista en el año 331 a.C. por Alejandro Magno.

En el siglo I d.C., los matemáticos griegos escriben sobre métodos de resolución de ecuaciones. Para el siglo III d.C., el matemático griego Diofanto publica su libro “Aritmética”, que trata por primera vez en forma rigurosa sobre el estudio de las ecuaciones de primer grado. Diofanto es considerado como uno de los precursores del Álgebra.

Hacia el siglo IX d.C., el matemático y astrónomo árabe Al-Khwarizmi desarrolló un avance importante sobre el uso de las ecuaciones, siendo su principal aportación, el introducir en Europa el sistema de numeración decimal e investigar sobre los principios fundamentales del Álgebra. Sin embargo, en la Edad Moderna, los franceses Vieta (siglo XVI) y Descartes (siglo XVII) dotan al álgebra de un lenguaje simbólico, que manejamos hasta nuestros días.

¿Cuál fue el matemático que escribió por primera vez sobre álgebra de manera rigurosa?

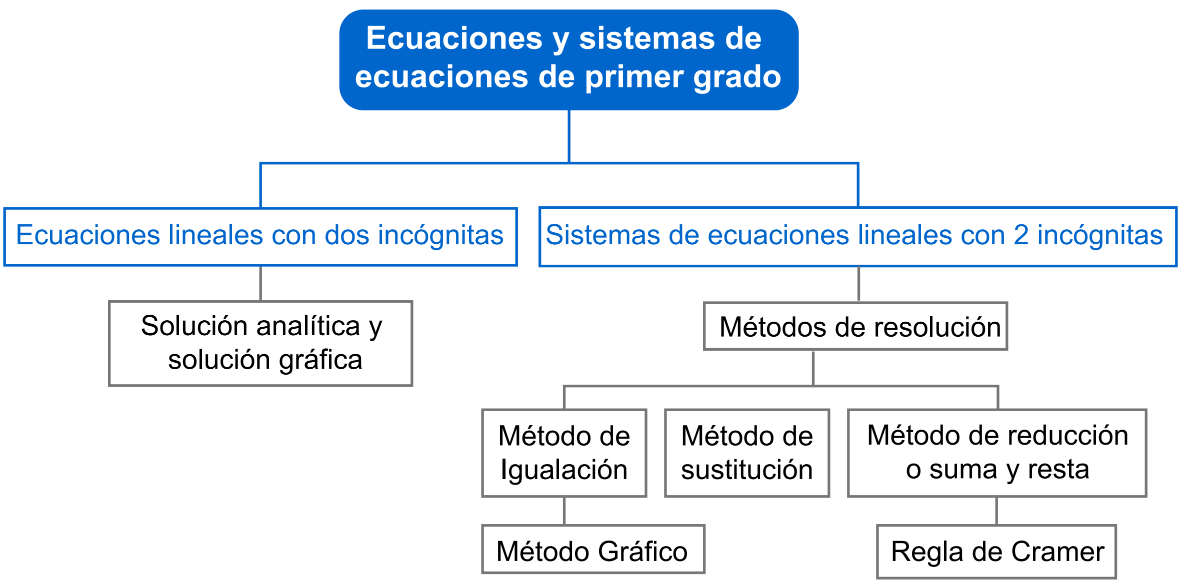
Objetivos de la unidad

1. Resolver ecuaciones lineales o de primer grado con dos incógnitas utilizando las propiedades adecuadas para ello.

2. Comprender cada uno de los métodos de resolución para sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas para su aplicación.

3. Identificar si las soluciones de los sistemas son únicas, infinitas o inexistentes.

Figura 12.
Temas a trabajar.



Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una expresión de la forma $ax + by + c = 0$, en la que ***x*** e ***y*** son las incógnitas, ***a*** y ***b*** son los coeficientes de las variables y ***c*** es el término independiente. Se sabe que una solución de una ecuación es un punto que, al ser sustituido por las incógnitas *x* e *y*, se transforma en una identidad. Toda ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones y su representación gráfica es una línea recta.

Si suponemos la ecuación:

$$4x - 5y = 12$$

Y despejamos la variable y, se tiene:

$$-5y = 12 - 4x$$

$$y = \frac{12 - 4x}{-5}$$

$$y = \frac{4x - 12}{5}$$

Si asignamos a la variable *x* algunos valores, como: (-2, -1, 0, 1, 2) tenemos los valores de *y* correspondientes al sustituir en la ecuación despejada.

$$y = \frac{4(-2) - 12}{5} = \frac{-8 - 12}{5} = \frac{-20}{5} = -4$$

$$A(-2; -4)\ solución\ 1$$

$$y = \frac{4(-1) - 12}{5} = \frac{-4 - 12}{5} = \frac{-16}{5} = -\frac{16}{5}$$

$$B\left(-1; -\frac{16}{5}\right)\ solución\ 2$$

$$y = \frac{4(0) - 12}{5} = \frac{0 - 12}{5} = \frac{-12}{5} = -\frac{12}{5}$$

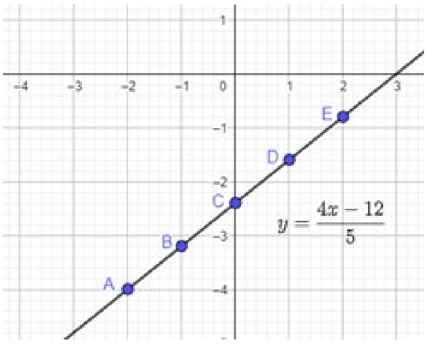
$$D\left(1;-\frac{8}{5}\right)\ solución\ 4$$

$$y=\frac{4(2)-12}{5}=\frac{8-12}{5}=\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5}$$

$$E\left(2;-\frac{4}{5}\right)\ solución\ 5$$

Mientras más valores le asignemos a x, más valores de y obtendremos, por esa causa las soluciones son infinitas.

Figura 13.
Representación gráfica de una función lineal.



Para dibujar una recta es suficiente con hallar 2 de sus soluciones, pues por dos puntos pasa una sola recta.

Si deseáramos encontrar los puntos de corte con los ejes, deberíamos reemplazar los valores de $x=0$, e $y=0$, en la ecuación original y así obtendríamos las dos soluciones suficientes para trazar la recta; así:

$$4x-5y=12$$

Si $x=0$, entonces:

$$4(0)-5y=12$$

$$0-5y=12$$

$$-5y = 12$$

$$y = \frac{12}{-5} = -\frac{12}{5}$$

$$A\left(0; -\frac{12}{5}\right)$$

Este punto toma el nombre de ***ordenada al origen***.

Si $y = 0$, entonces:

$$4x - 5(0) = 12$$

$$4x - 0 = 12$$

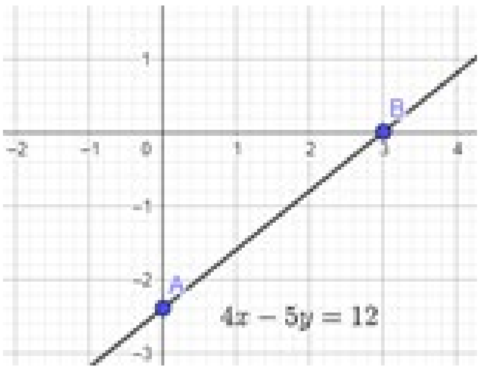
$$4x = 12$$

$$x = \frac{12}{4} = 3$$

$$B(3; 0)$$

Este punto toma el nombre de ***abscisa al origen.***

Figura 14.
Representación de la abscisa y la ordenada al origen en una función lineal.



Ejercicios de refuerzo:

Resuelva:

1. $2y - x = 1$

Como ya señalamos, para trazar la recta que representa esta ecuación es suficiente encontrar 2 puntos. Para ello ***se recomienda*** encontrar los puntos de corte con los ejes, ***si fuera posible***.

Si $x = 0$, entonces:

$$2y - 0 = 1$$

$$2y = 1$$

$$y = \frac{1}{2}$$

$$A\left(0; \frac{1}{2}\right)$$

Si $y = 0$, entonces:

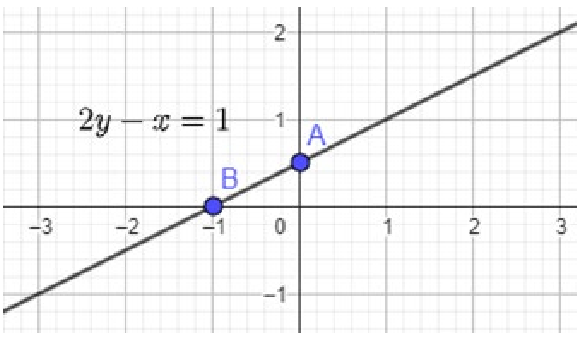
$$2(0) - x = 1$$

$$-x = 1$$

$$x = -1$$

$$B(-1; 0)$$

Figura 15.
Representación gráfica de los puntos de corte de una función lineal.



mejorar calidad imagen

2. $2x - 3y = 4$

Si $x = 0$, entonces:

$$2(0) - 3y = 4$$

$$-3y = 4$$

$$y = -\frac{4}{3}$$

$$A\left(0; -\frac{4}{3}\right)$$

Si $y = 0$, entonces:

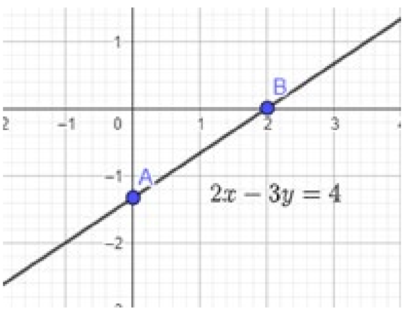
$$2x - 3(0) = 4$$

$$2x = 4$$

$$x = \frac{4}{2} = 2$$

$$B(2; 0)$$

Figura 16.
Representación gráfica de función lineal con sus puntos de corte.



mejorar calidad imagen

3. $x + y = 0$

Este es un caso especial, pues si damos a ***x*** el valor de CERO, el valor de ***y*** también es CERO, razón por la cual hay que tomar otro valor de ***x*** para obtener la segunda solución; así:

Si $x = 0$, entonces:

$$0 + y = 0$$

$$y = 0$$

$$A(0; 0)$$

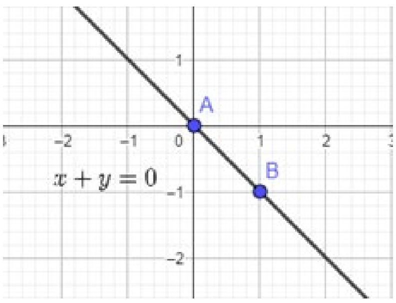
Si $x = 1$, entonces:

$$1 + y = 0$$

$$y = -1$$

$$B(1; -1)$$

Figura 17.
Representación gráfica de una función lineal especial.



Si en la expresión:

$$ax + by + c = 0$$

Despejamos la variable ***y*** en función de ***x***, se obtiene:

$$by = -ax - c$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

En esta función, la fracción $-\frac{a}{b}$ representa la pendiente de la recta, $-\frac{c}{b}$ representa el punto de corte de la función con el eje ***y***.

Así, en la ecuación:

$$2y - x = 1$$

Ejercicios propuestos:

Con el método previamente mostrado, resuelva y halle la pendiente y el punto de corte con el eje y:

1. $x + y = 21$
2. $x - y = 5$
3. $2x + y = 9$
4. $y - 3x = 1$
5. $3y + 2x = 5$
6. $3x - 2y = 14$
7. $x + 3y = 2$
8. $3x - y = -2$
9. $2x - y = 3$
10. $y - x = -1$

Respuestas en la página 235

Sistemas de ecuaciones

Los sistemas de ecuaciones lineales se presentan en muchos modelos físicos, económicos y estadísticos. El número de ecuaciones es igual al número de variables, en cuyo caso, es posible resolverlos para valores únicos de las variables. Ahora veremos algunos métodos para su resolución.

Método de igualación:

Este método consiste en despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones para luego igualar las expresiones algebraicas obtenidas. Se obtiene así una ecuación con una sola incógnita. Para encontrar la otra variable, se procede de la misma manera.

Ejercicio 1

Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Para resolver por el método de igualación, se despeja la misma variable de las dos ecuaciones. Así, para hallar el valor de ***x*** despejamos ***y.***

De la primera ecuación:

$$2x - y - 2 = 0$$

$$-y = -2x + 2$$

$$y = 2x - 2$$

De la segunda ecuación:

$$x + y = 3$$

$$y = -x + 3$$

Ahora, aplicando el principio de transitividad que indica que: ***"dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí"***, en otras palabras, como ***y*** es igual a ***y***, entonces:

De la primera ecuación:

$$2x - 2 = -x + 3$$

$$2x + x = 3 + 2$$

De la segunda ecuación:

$$3x = 5$$

$$x = \frac{5}{3}$$

Para hallar el valor de ***y*** despejamos ***x***

De la primera ecuación:

$$2x - y - 2 = 0$$

$$2x = y + 2$$

$$x = \frac{y + 2}{2}$$

De la segunda ecuación:

$$x + y = 3$$
$$x = -y + 3$$

Como ***x*** es igual a ***x***, entonces:

De la primera ecuación:

$$\frac{y + 2}{2} = -y + 3$$

$$y + 2 = 2(-y + 3)$$

$$y + 2 = -2y + 6$$

$$y + 2y = 6 - 2$$

$$3y = 4$$

$$y = \frac{4}{3}$$

Solución: $P = \left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$

Como se puede observar el resultado es el mismo que al aplicar el método de igualación.

Ejercicio 2

Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} 3y - 5x - 14 = 0 \\ 2x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

Para resolver por el método de sustitución, lo que se debe hacer es despejar la variable que uno desee de la ecuación que uno elija, y este resultado se sustituye en la otra ecuación; así:

De la primera ecuación despejamos la variable ***y***:

$$3y - 5x - 14 = 0$$

$$3y = 5x + 14$$

$$y = \frac{5x + 14}{3}$$

Sustituimos en la segunda ecuación:

$$2x - 3y + 2 = 0$$

$$2x - 3\left(\frac{5x + 14}{3}\right) + 2 = 0$$

$$2x - (5x + 14) + 2 = 0$$

$$2x - 5x - 14 + 2 = 0$$

Para hallar el valor de ***y*** despejamos ***x***.

De la primera ecuación:

$$3y - 5x - 14 = 0$$

$$-5x = -3y + 14$$

$$5x = 3y - 14$$

$$x = \frac{3y - 14}{5}$$

Sustituimos en la segunda ecuación:

$$2x - 3y + 2 = 0$$

$$2\left(\frac{3y - 14}{5}\right) - 3y + 2 = 0$$

$$\left(\frac{6y - 28}{5}\right) - 3y + 2 = 0$$

$$\frac{6y - 28 - 15y + 10}{5} = 0$$

$$-18 - 9y = 0$$

$$-9y = 18$$

$$y = -\frac{18}{9}$$

$$y = -2$$

Solución: $P = (-4; -2)$

Ejercicios propuestos:

Resuelva los siguientes sistemas mediante el método de sustitución:

1. $\begin{cases} 3x - 7 = y \\ 4x - 5y = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 10x + 4y = 58 \\ 13x - 4y = 57 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 10y = 38 - 6x \\ 12y = 48 - 6x \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x + 10 = 5y \\ 7x + 20 = -5y \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x + 3y = 17 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 10x + 4y = 20 \\ 13x - 4y = -66 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 13x - 4y = 57 \\ 5x + 2y = 29 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x - 5y = 19 \\ 2x - 4y = 16 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3(x - 2) = 8y + 1 \\ 8(y + 1) = 4x - 4 \end{cases}$

Respuestas en la página 235

Método de reducción o suma y resta:

Este método consiste en sumar o restar las ecuaciones entre sí para eliminar una de las variables. A veces, es necesario multiplicar por algún número las ecuaciones para que al sumarlas, desaparezca una de las variables.

Ejercicio 1

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Para resolver por el método de reducción, lo que se debe hacer es dejar las variables de las dos ecuaciones en el miembro izquierdo de la igualdad y los valores independientes en el miembro derecho; así:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Luego debemos analizar si es posible eliminar directamente una de las dos variables, como se puede ver, en las ecuaciones es bueno eliminar la variable ***y***, ya que,en la primera ecuación tiene signo negativo y en la segunda positivo.

$$2x - y = 2$$

$$\underline{x + y = 3}$$

Se elimina la variable que tiene igual coeficiente, pero signo contrario, en este caso, la variable ***y.***

$$3x = 5$$

$$x = \frac{5}{3}$$

Para hallar el valor de ***y*** hay que eliminar la variable ***x***. Es necesario analizar los coeficientes de la variable mencionada y tenemos 2 en la primera ecuación y 1 en la segunda, para eliminar x se debe multiplicar por 2 y para eliminar debe ser negativa; así:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 3\ por - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -2x - 2y = -6 \end{cases}$$

Luego, se procede de la misma forma explicada anteriormente.

$$2x - y = 2$$

$$\underline{-2x - 2y = -6}$$

$$-3y = -4$$

$$y = \frac{-4}{-3}$$

$$y = \frac{4}{3}$$

Solución: $P = \left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$

Como se observa, el resultado es el mismo que al aplicar el método de igualación o el de sustitución.

Ejercicio 2

Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y - 2 = 0 \\ \frac{1}{6}x + \frac{3}{4}y + \frac{5}{2} = 0 \end{cases}$$

Ya se indicó que, para resolver por el método de reducción, lo que se debe hacer es dejar las variables de las dos ecuaciones en el miembro izquierdo de la igualdad y los valores independientes en el miembro derecho; así:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{4}y = 2 \\ \dfrac{1}{6}x + \dfrac{3}{4}y = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Luego debemos analizar si es posible eliminar directamente una de las dos variables, como se puede observar, en las ecuaciones es bueno eliminar la variable ***y***, ya que, en la primera ecuación tiene signo negativo y en la segunda positivo. Además, se puede multiplicar a la primera ecuación por 3 para eliminar la variable mencionada.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{4}y = 2 \; multiplicamos \; por \; 3 \\ \qquad \dfrac{1}{6}x + \dfrac{3}{4}y = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{3}{3}x - \dfrac{3}{4}y = 6 \\ \dfrac{1}{6}x + \dfrac{3}{4}y = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\dfrac{3}{3}x - \dfrac{3}{4}y = 6$$

$$\dfrac{1}{6}x + \dfrac{3}{4}y = -\dfrac{5}{2}$$

$$x + \dfrac{1}{6}x = 6 - \dfrac{5}{2}$$

$$\dfrac{6x + x}{6} = \dfrac{12 - 5}{2}$$

$$\dfrac{7x}{6} = \dfrac{7}{2}$$

$$x = 3$$

Para hallar el valor de ***y*** hay que eliminar la variable ***x***. Es necesario analizar los coeficientes de la variable mencionada. Dado que, tenemos 2 en la primera ecuación y 1 en la segunda, para eliminar x se debe multiplicar por 2 y para eliminar debe ser negativa.

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = 2 \; multiplicamos\ por - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6}x + \frac{3}{4}y = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{6}x + \frac{1}{8}y = -1$$
$$\frac{1}{6}x + \frac{3}{4}y = -\frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{8}y + \frac{3}{4}y = -1 - \frac{5}{2}$$

$$\frac{y + 6y}{8} = \frac{-2 - 5}{2}$$

$$\frac{7y}{8} = \frac{-7}{2}$$

$$y = -4$$

Solución: $P = (3; -4)$

Ejercicios propuestos:

Resuelva los siguientes sistemas mediante el método de reducción o suma y resta:

1. $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 3x + y = 35 \end{cases}$

Ciudadanía digital

Puedes verificar la solución de tus sistemas de ecuaciones lineales, haciendo uso de una aplicación libre:

https://matrixcalc.org/es/slu.html

También se puede usar Geogebra para la solución gráfica:

https://www.geogebra.org/m/UuQKW2Px

2. $\begin{cases} y = 4x \\ 3x + y = 21 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = y + 8 \\ x + 3y = 48 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ 4x = y + 6 \end{cases}$

5. $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ 2y - 5x = 7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x = 3y + 14 \\ x - y = 10 \end{cases}$

7. $\begin{cases} y - 2x = 9 \\ 5x = 3y - 26 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = 3y \\ \frac{y+5}{3} = 15 - x \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = 7 - y \\ \frac{x}{3} = \frac{4-y}{2} \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x - y = 21 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

Interdisciplinariedad

Análisis de equilibrio del mercado. En Economía, el equilibrio del mercado se encuentra cuando la oferta iguala a la demanda. Esto se puede modelar usando sistemas de ecuaciones lineales.

Respuestas en la página 235

Método gráfico:

Este método consiste en representar las dos ecuaciones y calcular el punto de corte de las mismas. Este punto es la solución del sistema porque sus coordenadas satisfacen las dos ecuaciones.

Ejercicio 1

Aplicación a la Economía. Se sabe que la función de demanda de una empresa que vende un nuevo modelo de zapatos está dada por: $x + y = 3$, y la función de oferta es: $2x - y - 2 = 0$; encuentre el punto de equilibrio.

Para ello se debe resolver el sistema planteado así:

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Para resolver por el método gráfico, hay que proceder como se indicó en la resolución de ecuaciones con dos incógnitas, identificando dos puntos solución para el trazo de cada recta; así:

$$2x - y = 2$$

Cuando x = 0

$$2(0) - y = 2$$

$$-y = 2$$

$y = -2$ Cuando y = 0

$$2x - 0 = 2$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Tenemos los puntos A (0; -2) y B (1; 0).

Lo propio para la segunda recta:

$$x + y = 3$$

Cuando x = 0

$$0 + y = 3$$

$$y = 3$$

Cuando y = 0

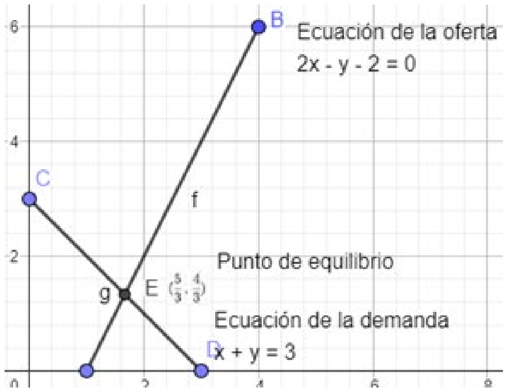
$$x + 0 = 3$$

$$x = 3$$

Tenemos los puntos C (0; 3) y D (3; 0)

Trazamos las gráficas correspondientes:

Figura 18.
Representación del método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones.



Como se puede observar el resultado es el mismo que al aplicar el método de igualación, de sustitución o el de reducción.

Ejercicio 2

Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ -3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Para resolver por el método gráfico, hay que proceder como se indicó en la resolución de ecuaciones con dos incógnitas, esto es, dar dos puntos solución para el trazo de cada recta; así:

$$2x - y - 1 = 0$$

Cuando x = 0

$$2(0) - y - 1 = 0$$

$$-y = 1$$

$$y = -1$$

Cuando y = 0

$$2x - 0 - 1 = 0$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Tenemos los puntos $A\ (0;\ -1)$ y $B\ \left(\frac{1}{2};\ 0\right)$.

Lo propio para la segunda recta:

$$-3x + 2y - 1 = 0$$

Cuando x = 0

$$-3(0) + 2y - 1 = 0$$

$$2y = 1$$

$$y = \frac{1}{2}$$

Cuando y = 0

$$-3x + 2(0) - 1 = 0$$

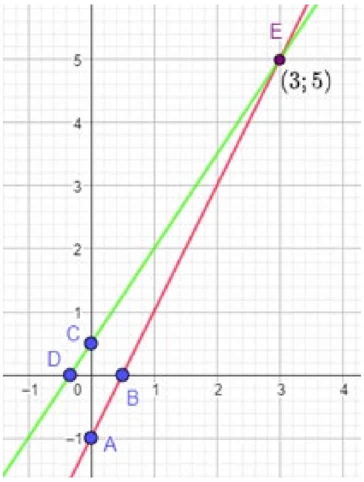
$$-3x = 1$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

Tenemos los puntos $C\ \left(0;\ \frac{1}{2}\right)$ y $D\ \left(-\frac{1}{3};\ 0\right)$.

A continuación, se traza las gráficas correspondientes.

Figura 19.
Representación del método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones.



Ejercicios propuestos:

1. $\begin{cases} 7x + y = 22 \\ 5x + y = 14 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 4y = 6 \\ x - 2y = 18 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + 5y = 9 \\ 3x - y = -9 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 8x = 11 - 5y \\ 5x = 15 + 5y \end{cases}$

5. $\begin{cases} -10x = 2y + 30 \\ -x = 14 - 2y \end{cases}$

6. $\begin{cases} 7x + y = 42 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x - 2y = -14 \\ 4x - 5y = -32 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + 5y = 44 \\ 6x - 5y = -8 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 7x - 3y = 23 \\ -2x - 3y = 5 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 8x - 1 = 3y \\ 8x + 1 = 9y \end{cases}$

Respuestas en la página 236

Interdisciplinariedad

Optimización de recursos. Los sistemas de ecuaciones lineales se utilizan para modelar problemas de optimización en Economía. Por ejemplo, una empresa que produce dos productos puede usar un sistema de ecuaciones para determinar la combinación óptima de productos que maximiza las ganancias o minimiza los costos.

Capítulo 07

Ecuaciones de segundo grado y polinómicas

Figura 19.
Diseño de jardines y senderos en forma de parábolas.

Nota. Tomado de Sendero bajo un hermoso arco de flores y plantas. Freepik, 2024, https://tinyurl.com/2s38emzz

Las formas parabólicas son muy empleadas en la arquitectura y en el diseño de paisajes. Suelen estar presentes de diversas maneras en senderos o en jardines atractivos y funcionales, las parábolas pueden ser utilizadas para trazar senderos curvos y crear áreas de descanso, logrando efectos visuales dinámicos y armoniosos.

Las figuras en forma de parábolas pueden ser empleadas de manera creativa en senderos o jardines para agregar interés visual, crear recorridos fluidos y orgánicos y añadir elementos estéticos y funcionales al diseño del paisaje. Su uso puede aportar dinamismo y armonía al entorno, convirtiéndolos en espacios agradables y atractivos para quienes los disfrutan.

En tu entorno, ¿dónde encuentras objetos en forma de parábolas?

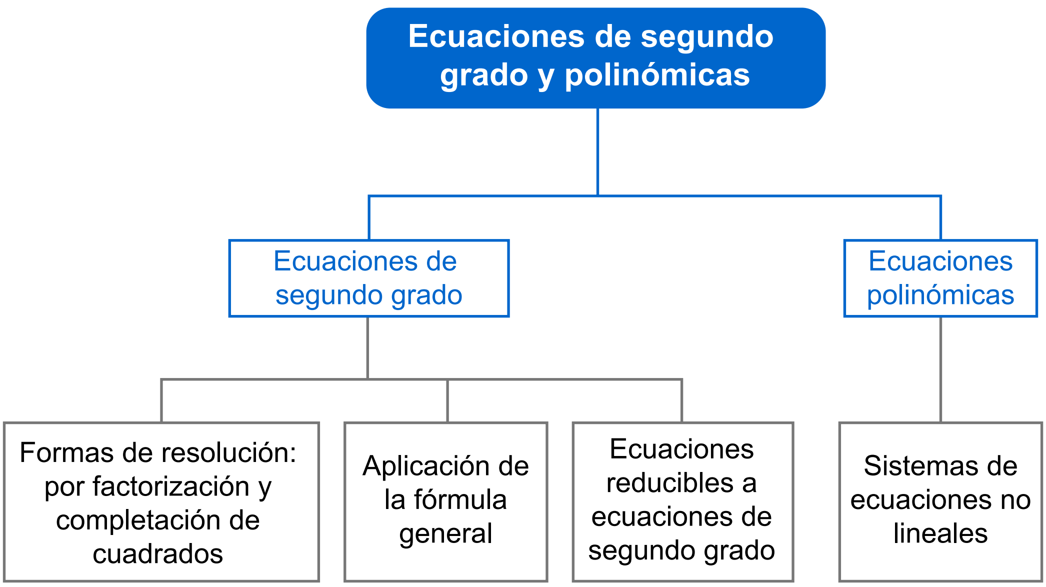
Objetivos de unidad

1. Identificar los elementos que conforman la ecuación cuadrática, a través del análisis de los coeficientes de la ecuación, para la determinación de las soluciones.

2. Resolver una ecuación cuadrática, mediante la aplicación de procesos de factorización y de la aplicación de la fórmula general, para la comprobación de la validez de estas soluciones.

3. Determinar la forma de la solución de una ecuación polinómica, el número de raíces que tiene, para su resolución y verificación.

Figura 20.
Temas a trabajar.



Tema 1
Ecuaciones de segundo grado y métodos de resolución

Definición: una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática es una ecuación polinómica donde el mayor exponente es igual a dos. En forma general se expresa como un polinomio cuadrático igualado a cero.

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 0$$

En la fórmula de la ecuación de segundo grado, a es el coeficiente cuadrático o de segundo grado y es siempre distinto de cero, b el coeficiente lineal o de primer grado, c es el término independiente y x es la incógnita.

Al estar la incógnita elevada al cuadrado, la ecuación cuadrática tiene dos raíces o soluciones. Las ecuaciones de segundo grado se clasifican de la siguiente manera:

a) Ecuaciones de segundo grado incompletas

Las ecuaciones de segundo grado incompletas pueden ser de los siguientes casos:

i) Si: $b = 0 \Longrightarrow ax^2 + c = 0$**,** en este caso las soluciones se establecen así:

$$x^2 = \frac{-c}{a}; \quad x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Ejemplo:

$$x^2 + 49 = 0 \qquad x^2 = -49; \quad x = \pm\sqrt{-49}; \quad x = \pm 7i$$

Ciudadanía digital

Para practicar sobre ecuaciones de segundo grado puedes emplear la inteligencia artificial:

https://tinyurl.com/muwbspy4

También puedes escanear el código QR.

Tiene dos raíces iguales, pero de signos contrarios.

ii) Si c = 0 $\Longrightarrow$ $ax^2 + bx = 0$, factoramos la ecuación
$x(ax + b) = 0$; $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{-b}{a}$

Ejemplo:

$x^2 + 4x = 0 \qquad x(x+4) = 0; \;\; x_1 = 0; \;\; x_2 = -4$

Tiene una raíz nula y otra raíz racional.

iii) Si b = c = 0 $\Longrightarrow$ $ax^2 = 0$, despejamos x
$x^2 = 0; \;\; x_1 = 0; \;\; x_2 = 0$

Ejemplo:

$9x^2 = 0 \qquad x_1 = 0; \;\; x_2 = 0$

Tiene dos raíces nulas.

b) Ecuaciones de segundo grado completas

Tiene la forma canónica:

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 0$$

Donde los tres coeficientes *a*, *b* y *c* son distintos de cero. Esta ecuación admite tres posibilidades para las soluciones: dos números reales y diferentes, dos números reales e iguales (un número real *doble*) o dos números complejos. Se resuelve por factorización, por el método de completar el cuadrado o por fórmula general. La fórmula general se deduce más adelante.

i) Resolución por factorización

Para resolver por factorización se emplea los casos de factorización de trinomios.

A continuación, se presenta varios ejemplos:

$4x^2+12x+9=0$	$x^2-5x+6=0$	$3x^2+2x-5=0$
$(2x+3)^2=0$	$(x-3)(x-2)=0$	$\dfrac{(3x+5)(3x-3)}{3}=0$
$\sqrt{(2x+3)^2}=0$	$x_1=3$	$(3x+5)(x-1)=0$
$2x+3=0$	$x_2=2$	$x_1=\dfrac{-5}{3}$
$2x=-3$		$x_2=1$
$x_1=x_2=-\dfrac{3}{2}$		

ii) Completando trinomio cuadrado perfecto

Para completar un trinomio cuadrado perfecto, el coeficiente de x^2 debe ser 1.

Veamos el siguiente ejemplo:

$5x^2 - 6x + 5 = 0$ dividimos para 5

$x^2-\frac{6}{5}x=-1$; se divide el coeficiente de x para 2 y elevamos al cuadrado, el valor resultante se suma a los dos miembros de la igualdad.

$$\left(\frac{\frac{6}{5}}{2}\right)^2=\left(\frac{6}{10}\right)^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

$$\left(x^2-\frac{6}{5}x+\frac{9}{25}\right)=-1+\frac{9}{25};\quad \left(x-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{-16}{25};\quad \sqrt{\left(x-\frac{3}{5}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{-16}{25}};$$

$$x=\frac{3}{5}\pm\sqrt{\frac{-16}{25}};\quad x=\frac{3}{5}\pm\frac{4}{5}i;$$

$$x_1=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i;\quad x_2=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$$

Ejercicios resueltos

Resolvamos las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x+4}=1$

Solución

Condicionamos los denominadores para que no sean cero:

$x+1\neq 0 \quad \wedge \quad x+4\neq 0; \qquad x\neq -1 \quad \wedge \quad x\neq -4$

En la ecuación hacemos suma de fracciones:

$$\frac{x(x+4)+x(x+1)}{(x+1)(x+4)}=1;\ \frac{x^2+4x+x^2+x}{(x+1)(x+4)}=1;$$

$$2x^2+5x=(x+1)(x+4);\ 2x^2+5x=x^2+5x+4;\ x^2-4=0$$

$$(x-2)(x+2)=0$$

$$x-2=0 \quad \wedge \quad x+2=0$$

$$x_1=2 \quad \wedge \quad x_2=-2$$

Entonces el conjunto solución es: $\{2, -2\}$

b) $\dfrac{x}{x-6}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{6}+\dfrac{x+6}{6-x}$

Solución

En la ecuación cambiamos de signo al segundo denominador de derecha:

$$\frac{x}{x-6}-\frac{1}{2}=\frac{x}{6}-\frac{x+6}{x-6}$$

En la ecuación hay que condicionar los denominadores para que no sean cero: $x-6\neq 0$; $x\neq 6$

Sumamos las fracciones e igualamos a cero:

$$\frac{x}{x-6}+\frac{x+6}{x-6}-\frac{x}{6}-\frac{1}{2}=0;\ \frac{x+x+6}{x-6}-\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right)=0;\ \frac{2x+6}{x-6}-\left(\frac{x+3}{6}\right)=0$$

$$\frac{2(x+3)}{x-6}-\left(\frac{x+3}{6}\right)=0$$

Sacamos factor común el factor $(x+3)$ y queda:

$$(x+3)\left(\frac{2}{x-6}-\frac{1}{6}\right)=0;\ (x+3)\left(\frac{12-(x-6)}{6(x-6)}\right)=0;\ (x+3)\left(\frac{12-x+6}{6(x-6)}\right)=0$$

$$(x+3)\left(\frac{18-x}{6(x-6)}\right)=0;\ (x+3)\left(\frac{x-18}{6(x-6)}\right)=0$$

$$(x+3)(x-18)=0$$

$$\wedge \quad x-18=0$$

$$x+3=0 \quad \wedge \quad x-18=0$$

$$x_1=-3 \quad \wedge \quad x_2=18$$

Ejercicios propuestos

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado por descomposición factorial.

a. $x^2+6x+9=0$

b. $2x^2-16x+30=0$

c. $x^2-4x-21=0$

d. $x^2-4x-21=0$

e. $x^2+3x-28=0$

f. $2x^2+15=-11x$

2. Encuentra las de soluciones de la ecuación, completando trinomio cuadrado perfecto.

a. $x^2 - 6x + 8 = 0$

b. $x^2 - 5x + 6 = 0$

c. $x^2 - 4x - 21 = 0$

d. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4} = \frac{5}{4}$

e. $\frac{2x^2 - 1}{x-3} = x + 3 + \frac{17}{x-3}$

f. $\frac{x}{2a} = \frac{3a}{6x - 5a}$

g. $\frac{5x^2 - 2a^2}{x} = \frac{a}{3}$

h. $\frac{3(x-1)}{x+1} - \frac{2(x+1)}{x-1} = 5$

Respuestas en la página 236

Tema 2

Fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado

Dada la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$, como *a* es distinto de cero, podemos dividir por *a* cada término de la ecuación y restamos el valor del término independiente en ambos miembros de la igualdad:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0; \qquad x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Para completar el cuadrado en el miembro izquierdo, se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente lineal, por lo que se suma $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ en ambos miembros de la ecuación:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Se factoriza el lado izquierdo y se realiza la operación indicada del derecho:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

Se realiza las operaciones indicadas:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2};\quad x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

Se separa las raíces de la fracción del lado derecho, se simplifica el radical del denominador del miembro derecho y se despeja la incógnita que buscamos:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}};\; x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Las raíces de la ecuación de segundo se expresan como dos raíces irracionales:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\qquad\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Carácter de las raíces

Para la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$, las soluciones son: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, donde $\Delta=b^2-4ac$ se conoce como discriminante y permite analizar las raíces sin necesidad de resolver la ecuación.

Raíces reales distintas	Raíces reales iguales	Raíces complejas y conjugadas
$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$

Propiedades de las raíces de la ecuación cuadrática

Para la ecuación $ax^2+bx+c=0$ de raíces x_1 y x_2 se cumple las condiciones que se describe a continuación.

a) Suma de raíces: $S=x_1+x_2$; $S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$

Demostración:
Se suma las raíces generales:

$$S=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ ;\ S=\frac{-2b}{2a}\ ;\ S=-\frac{b}{a}$$

b) Producto de raíces: $P=x_1\,.\,x_2$; $P=x_1\,.\,x_2=\dfrac{c}{a}$

Demostración:
Se multiplica las raíces generales:

$$P=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right);$$

$$P=\left(\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right);\ P=\frac{(b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{(2a)^2}$$

$$P=\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}\ ;\ P=\frac{4ac}{4a^2}\ ;\ P=\frac{c}{a}$$

Ecuación cuadrática en términos de la suma y el producto

Sea la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0;\ a\neq 0$, al dividir para el coeficiente de x^2, se obtiene:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0;\quad x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0$$

Como: $S=-\dfrac{b}{a}\ \wedge\ P=\dfrac{c}{a}$,

La ecuación cuadrática en términos de la suma y el producto es:

$$x^2-Sx+P=0$$

De modo que, es equivalente a: $x^2\ -\ (x_1+x_2)x\ +\ x_1 . x_2=0$

Al factorizar se obtiene: $(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$

Actividades resueltas

1. Resolvamos la siguiente ecuación aplicando la fórmula general.

$$\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{x}$$

Solución
Organizamos la expresión y obtenemos el mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}$$

$$\frac{x+1+x+6}{(x+6)(x+1)}=\frac{2-1}{2x};\qquad \frac{2x+7}{(x+6)(x+1)}=\frac{1}{2x}$$

$$2x(2x+7)=(x+6)(x+1);\ \ 4x^2+14x=x^2+7x+6;\ 3x^2+7x-6=0$$

Determinamos los coeficientes de la ecuación de segundo grado y aplicamos la fórmula general para su resolución.

$3x^2+7x-6=0;\ \ a=3;\ b=7;\ c=-6$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\ x=\dfrac{-7\pm\sqrt{49-4(3)(-6)}}{2(3)};\ x=\dfrac{-7\pm\sqrt{121}}{6};x=\dfrac{-7\pm 11}{6};$

$x_1=\dfrac{-7+11}{6};\ x_1=\dfrac{4}{6};\ x_1=\dfrac{2}{3}$

$x_2=\dfrac{-7-11}{6};\ x_2=\dfrac{-18}{6};\ x_2=-3$

2. Determinamos el carácter de las raíces de las siguientes ecuaciones.

Ecuación	Análisis del discriminante b^2-4ac	Análisis de las raíces	Raíces
$5x^2-x-1=0$	$\Delta=(-1)^2-4(5)(-1)=21$	$\Delta>0,$ las raíces son reales diferentes.	$x_1=\dfrac{1+\sqrt{21}}{10};$ $x_2=\dfrac{1-\sqrt{21}}{10}$
$25x^2-20x+4=0$	$\Delta=(-20)^2-4(25)(4)=0$	$\Delta=0,$ las raíces son reales iguales	$x_1=x_2=\dfrac{2}{5}$
$x^2+x+2=0$	$\Delta=1^2-4(1)(2)=-7$	$\Delta<0,$ las raíces son complejas conjugadas.	$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{7}i}{2};$ $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{7}i}{2}$

3. Hallamos las raíces de las ecuaciones, empleando la suma y el producto de sus raíces.

a) $-x^2+7x-10=0$

Solución

Se cambia de signo a la ecuación:

$$x^2-7x+10=0$$

Entonces: $S=7 \quad \wedge \quad P=10$

Se descompone el producto en dos factores que sumados nos de 7.

$P=10=2\cdot 5$

$x_1=2 \quad \wedge \quad x_2=5$

b) $2x-3=1-2x+x^2$

Solución

Se iguala a cero $x^2-4x+4=0$

Entonces: $S=4 \quad \wedge \quad P=4$

Se descompone el producto en dos factores que sumados den 4.

$P=4=2\cdot 2$

$x_1=2 \quad \wedge \quad x_2=2$

Ejercicios propuestos

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula general.

a. $x^2+3x-28=0$

b. $2x^2+15=10x$

c. $x^2-8x+11=0$

d. $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

e. $\dfrac{(x-a-b)4x}{a+b+c}+a+b=c$

f. $(x+2)(x+3)=6$

g. $4(x^2-1)=4x-1$

h. $(2x-3)^2-8x=0$

i. $\frac{9}{x}-\frac{x}{3}=2$

j. $\left(6x-\frac{2}{3}\right)x-2\left(x-\frac{1}{9}\right)=0$

k. $x^2-2ax+a^2-b^2=0$

l. $5x^2-8x+4=0$

2. Halla el valor de *m* en la ecuación $x^2-5mx+2m^2=0$, sabiendo que la suma de las raíces es igual a la mitad del producto de las raíces.

Respuestas en la página 237

Tema 3

Ecuaciones reducibles a ecuaciones de segundo grado

a) Ecuaciones que se resuelven con cambio de variable

Son las ecuaciones que se expresan de la forma $ax^{2n}+bx^n+c=0$, con $a\neq 0$. Mediante el cambio de variable $z=x^n$ se expresan como una ecuación de segundo grado: $az^2+bz+c=0$.

Entre estas ecuaciones se hallan las bicuadradas, ecuaciones de cuarto grado en las que no aparecen términos de tercero ni de primer grado.

Ejemplo resuelto
Hallamos las soluciones de la ecuación de cuarto grado: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Solución
Se realiza un cambio de variable $x^2 = z$ y se reescribe la ecuación para resolverla.

$z^2 - 5z + 4 = 0$; $(z-4)(z-1) = 0$; $z_1 = 4 \quad \wedge \quad z_2 = 1$

Las soluciones de la ecuación inicial son: $x^2 = 4 \quad \wedge \quad x^2 = 1$

Entonces: $x = \pm\sqrt{4} \quad \wedge \quad x = \pm\sqrt{1}$

Como la ecuación es de cuarto grado, las soluciones son: $x_1 = 2;\ x_2 = -2;\ x_3 = 1;\ x_4 = -1$

b) Ecuaciones irracionales

Son ecuaciones que contienen radicales y para su resolución se debe elevar los dos miembros a una potencia para eliminar la raíz. Esta transformación da lugar a una nueva ecuación que tiene todas las soluciones de la primera, pero que puede tener alguna más, por lo tanto, es necesario comprobar, en la ecuación original, todas las soluciones obtenidas.

Ejemplo resuelto

a) Resolvamos la ecuación con radicales:

$$\sqrt{2x+3} - 3 = 3x - \frac{5}{2}$$

Solución

Se aísla la raíz: $\sqrt{2x+3} = 3x + \dfrac{1}{2}$

Se eleva al cuadrado: $\left(\sqrt{2x+3}\right)^2 = \left(3x + \dfrac{1}{2}\right)^2$

Se desarrolla y resuelve: $2x+3=9x^2+3x+\frac{1}{4}$; $8x+12=36x^2+12x+1$

Se aplica la fórmula general para encontrar las soluciones de:

$36x^2+4x-11=0$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4(36)(-11)}}{2(36)};\quad x=\frac{-4\pm\sqrt{16+1584}}{72}$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{1600}}{72};\quad x=\frac{-4\pm 40}{72};\quad x_1=\frac{-4+40}{72}\quad\wedge\quad x_2=\frac{-4-40}{72}$$

Las soluciones aparentes son: $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=-\frac{11}{18}$

Se comprueba en la ecuación inicial: $\sqrt{2x+3}-3=3x-\frac{5}{2}$

* Si $x_1=\frac{1}{2}$, entonces: $\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\right)+3}-3=3\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{2}$; $\sqrt{1+3}-3=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}$

$2-3=-\frac{2}{2}$; $-1=-1$, la primera raíz satisface la ecuación.

* Si $x_2=-\frac{11}{18}$, entonces: $\sqrt{2\left(-\frac{11}{18}\right)+3}-3=3\left(-\frac{11}{18}\right)-\frac{5}{2}$

$$\sqrt{-\frac{11}{9}+3}-3=-\frac{11}{6}-\frac{5}{2};\quad \sqrt{\frac{16}{9}}-3=-\frac{11}{6}-\frac{15}{6};\quad \frac{4}{3}-3=-\frac{26}{6}$$

$\frac{4}{3}-\frac{9}{3}=-\frac{13}{3}$; $-\frac{5}{3}\neq-\frac{13}{3}$, la segunda raíz no satisface la ecuación.

Entonces la solución es: $x_1=\frac{1}{2}$

b) Resolvamos la siguiente ecuación:

$$\sqrt{x+2} = x$$

Se eleva al cuadrado los dos miembros y se obtiene: $x+2=x^2$

Se desarrolla y resuelve: $x^2 - x - 2 = 0$; $(x-2)\cdot(x+1)=0$

$x_1 = 2 \quad \wedge \quad x_2 = -1$

Se comprueba en la ecuación inicial: $\sqrt{x+2} = x$

Sí: $x_1 = 2$

$\sqrt{2+2} = 2$

$2 = 2$

Sí: $x_2 = -1$

$\sqrt{-1+2} = -1$

$1 \neq -1$

Entonces la solución de la ecuación es: $x_1 = 2$

Actividades resueltas

1. Resuelve la siguiente ecuación cuadrática por cambio de variable.

$$3\left(\frac{x-2}{1-x}\right) - 4\sqrt{\frac{x-2}{1-x}} + 1 = 0$$

Solución

Se realiza un cambio de variable a la menor potencia:

$z = \sqrt{\dfrac{x-2}{1-x}}$; $z^2 = \dfrac{x-2}{1-x}$; queda: $3z^2 - 4z + 1 = 0$

Se factoriza: $(3z-1)(z-1)=0$; $(3z-1)=0$; $(z-1)=0$; $z=\dfrac{1}{3}$; $z=1$

Estos valores se sustituyen en el cambio de variable para obtener x.

$$z=\sqrt{\frac{x-2}{1-x}}$$

Si $z=\frac{1}{3}$

$$\sqrt{\frac{x-2}{1-x}}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{x-2}{1-x}=\frac{1}{9}$$

$$9x-18=1-x$$

$$10x=19$$

$$x_1=\frac{19}{10}$$

Si $z=1$

$$\sqrt{\frac{x-2}{1-x}}=1$$

$$\frac{x-2}{1-x}=1$$

$$x-2=1-x$$

$$2x=3$$

$$x_2=\frac{3}{2}$$

Entonces el conjunto solución es $\frac{19}{10}$ y $\frac{3}{2}$.

b) Resuelve la ecuación: $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-2}$

Se eleva al cuadrado a los dos lados de la ecuación:

$$\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}\right)^2=\left(\sqrt{3x-2}\right)^2;$$

$$2x-3+2\sqrt{(2x-3)(x-1)}+x-1=3x-2$$

$$3x-4+2\sqrt{(2x-3)(x-1)}=3x-2; \quad 2\sqrt{(2x-3)(x-1)}=3x-2-3x+4$$

$$2\sqrt{(2x-3)(x-1)}=2; \quad \sqrt{(2x-3)(x-1)}=1; \quad \left(\sqrt{(2x-3)(x-1)}\right)^2=(1)^2$$

$$(2x-3)(x-1)=1; \quad 2x^2-5x+3-1=0; \quad 2x^2-5x+2=0; \quad (2x-1)(x-2)=0$$

$$(2x-1)=0; \quad (x-2)=0;$$

$$x=\frac{1}{2} \qquad \wedge \qquad x=2$$

Al verificar solo x = 2, satisface la ecuación.

Actividades propuestas

1. Resuelve las siguientes ecuaciones por cambio de variable.

a. $\left(x^2+3x\right)^2=14\left(x^2+3x\right)-40$

b. $c^4x^4+\left(a^2c^2-b^2c^2\right)x^2-a^2b^2=0$

c. $\left(x^2+x\right)^2-8\left(x^2+x\right)+12=0$

d. $2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-9\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+10=0$

e. $9\left(x+2\right)^4+17\left(x+2\right)-2=0$

f. $\left(x^2+3x+2\right)^2-8\left(x^2+3x\right)=4$

2. Resuelve las ecuaciones con radicales.

a. $\sqrt{ax+2a^2}=\sqrt{3ax+3a^2}-a$

b. $x^2-6x-\sqrt{x^2-6x-3}=5$

c. $\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}+\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}=2\dfrac{1}{6}$

d. $\sqrt[3]{x^2-x+6}-2=0$

e. $8x^{\frac{3}{2n}}-8x^{\frac{-3}{2n}}=63$

Respuestas en la página 238

Tema 4
Sistemas de ecuaciones no lineales

Un sistema de ecuaciones es no lineal, cuando al menos una de sus ecuaciones no es de primer grado. La solución de estos sistemas se suele hacer por el método de sustitución o por suma producto.

Ejemplo resuelto

A continuación, se resuelve el siguiente sistema cuadrático

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Solución
Se despeja en la ecuación de primer grado una de las incógnitas y se reemplaza en la otra ecuación:

$y = 7 - x$. Reemplazamos: $x^2 + (7 - x)^2 = 25$

Se resuelve la ecuación resultante.

$$x^2 + 49 - 14x + x^2 - 25 = 0; \quad 2x^2 - 14x + 24 = 0; \; x^2 - 7x + 12 = 0$$
$$(x-4)(x-3) = 0; \quad x - 4 = 0; \; x - 3 = 0; \quad x_1 = 4 \;\; \wedge \;\; x_2 = 3$$

Cada uno de los valores obtenidos se sustituye en la ecuación de primer grado y se encuentra la solución del sistema.

$$\begin{array}{lll} x_1 = 4 & y = 7 - 4 & y_1 = 3 \\ x_2 = 3 & y = 7 - 3 & y_2 = 4 \end{array}$$

Solución: P(4, 3) y P(3, 4)

2) Para resolver el sistema cuadrático: $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} - y = 5 \end{cases}$

se despeja x en la segunda ecuación, luego se sustituye en la primera ecuación.

$\sqrt{x} = 5 + y; \; x = (5 + y)^2$

$y^2 - 2y + 1 = x; \; y^2 - 2y + 1 = (5 + y)^2$

Se resuelve la ecuación resultante:

$y^2 - 2y + 1 = 25 + 10y + y^2; \; 12y = 24; \; y = 2$

Cada uno de los valores obtenidos se sustituye en la otra ecuación y se obtiene los valores correspondientes de la otra incógnita.

y = 2 $\quad x = (5 + y)^2 \quad$ x = 49

Solución: P (49, 2)

Actividades resueltas

3) Analice el siguiente sistema y resuélvalo $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$

Solución

a) El sistema dado se pone en términos de la suma y el producto, para lo cual se aplica productos notables.

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 25 + 2xy \\ x + y = 7 \end{cases}$$

b) Como $S = x + y$, $P = x \cdot y$; entonces el sistema queda:

$$\begin{cases} S^2 = 25 + 2P \\ S = 7 \end{cases}$$

c) Se sustituye el valor de la suma en la otra ecuación: $S^2 = 25 + 2P$

$(7)^2 = 25 + 2P$;

$2P = 49 - 25$

$2P = 24$; $P = 12$

d) Se determina el valor de las variables:

$S = 7 \quad \wedge \quad P = 12$

$P = 12 = 3 \cdot 4$; $S = 3 + 4 = 7$

Entonces:

$x_1 = 3$ y $x_2 = 4$

$y_1 = 4$ y $y_2 = 3$

Las soluciones son:

P(3, 4); P(4, 3)

4) Analice el sistema cuadrático y resuélvalo: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x.y = 4 \end{cases}$

a) El sistema dado se pone en términos de la suma y el producto, para lo cual se aplica productos notables.

$\begin{cases} (x + y)^2 = 17 + 2xy \\ x.y = 4 \end{cases}$

b) Como $S = x + y$, $P = x \cdot y$ entonces el sistema queda:

$\begin{cases} S^2 = 17 + 2P \\ P = 4 \end{cases}$

c) Se sustituye el valor del producto en la otra ecuación: $S^2 = 17 + 2P$

$S^2 = 17 + 8$; $S^2 = 25$

$S = \pm 5$

$S_1 = 5 \quad \wedge \quad S_2 = -5$

Determinamos el valor de las variables.

$\begin{cases} S = 5 \\ P = 4 \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} S = -5 \\ P = 4 \end{cases}$

d) El producto se descompone en dos factores que sumados den S:

$P = 4 = 1 \cdot 4$ y

$P = 4 = (-1) \cdot (-4)$

$S = 1 + 4 = 5$; $S = (-1) + (-4) = -5$

Las soluciones son:

$x_1 = 1$; $y_1 = 4$; P(1, 4)

$x_2 = 4$; $y_2 = 1$; P(4, 1)

$x_3 = -1$; $y_3 = -4$; P(–1, –4)

$x_4 = -4$; $y_4 = -1$; P(–4, –1)

5) Resuelva el siguiente sistema cuadrático en el conjunto de números reales.

$$\begin{cases} x^2+y^2-(x+y)=48 & (1) \\ x+y+xy=31 & (2) \end{cases}$$

Solución

a) Se resuelve la ecuación (2), se simplifica y se obtiene:

$x+y+xy=31$

Se enumera como ecuación (3)

$x+y=31-xy \qquad (3)$

La ecuación (3) se eleva al cuadrado, se resuelve y se obtiene la ecuación (4).

$(x+y)^2=(31-xy)^2$

$x^2+2xy+y^2=961-62xy+x^2y^2$

$x^2+y^2=961-62xy+x^2y^2-2xy$

$x^2+y^2=961-64xy+x^2y^2 \qquad (4)$

b) La ecuación (3) y la (4) se reemplazan en la ecuación (1) y se obtiene:

$x^2+y^2-(x+y)=48 \qquad (1)$

$961-64xy+x^2y^2-(31-xy)=48$

$961-64xy+x^2y^2-31+xy-48=0$

$x^2y^2-63xy+882=0$

Al factorizar da:

$(xy-42)(xy-21)=0$

$xy-42=0 \quad \wedge \quad xy-21=0$

$xy=42 \quad \wedge \quad xy=21$

Estos valores de xy se reemplazan en la ecuación (3), obteniendo:

$x+y=31-xy \qquad (3)$

Si $xy=42$

$x+y=31-42$

$x+y=-11$

Si $xy=21$

$x+y=31-21$

$x+y=10$

c) Se resuelve los sistemas

$$\begin{cases} x+y=-11 \\ xy=42 \end{cases};\ \begin{cases} x=-11-y \\ (-11-y)y-42=0 \end{cases}$$

$-11y-y^2-42=0$;

$y^2+11y+42=0$

$$y=\frac{-11\pm\sqrt{121-168}}{2}$$

$$y=\frac{-11\pm\sqrt{47}\,i}{2}$$

Las soluciones son imaginarias, se busca las soluciones reales y se resuelve el otro sistema.

$$\begin{cases} x+y=10 \\ xy=21 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x=10-y \\ (10-y)y-21=0 \end{cases}$$

$10y-y^2-21=0$

$(y-7)(y-3)=0$

$(y-7)=0 \quad \wedge \quad (y-3)=0$

$y_1=7 \quad \wedge \quad y_2=3$

Entonces la solución es: 3 y 7.
P(3, 7) o P(7, 3)

Actividades propuestas

1. Resuelve los siguientes sistemas cuadráticos.

a. $\begin{cases} x^2+xy-y^2=-5 \\ y-x=3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{3}{x+y}=1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x^2+4xy+y^2=-8 \\ 7x^2+2xy-y^2=-28 \end{cases}$

d. $\begin{cases} y+\sqrt{x^2-1}=2 \\ \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{y} \end{cases}$

e. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=65 \\ x+y+z=13 \\ yz=12 \end{cases}$

g. $\begin{cases} x+y=72 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6 \end{cases}$

Respuestas en la página 238

Ciudadanía digital

Una forma de verificar si la solución analítica es correcta es a través de la graficación del sistema propuesto. Para ello puedes ingresar al siguiente enlace y graficar en geogebra.

https://www.geogebra.org/m/ZgwrwzBw

Capítulo 08

Inecuaciones de primer grado

Figura 21.
Paisaje acuático con un horizonte tranquilo e infinito, que refleja como las soluciones a una inecuación tienen una propiedad de simetría o reflexión

Nota. Tomado de Concepto despertar espiritual, Freepik, 2024, https://tinyurl.com/27vnobx4

Las inecuaciones surgen naturalmente en contextos donde se necesita describir relaciones de orden entre cantidades variables. La resolución de inecuaciones de primer grado implica el uso de propiedades algebraicas para su resolución, sin embargo, se debe recordar la utilización de los axiomas de orden.

Las inecuaciones surgen cuando necesitamos representar situaciones en la que una cantidad es mayor, menor o distinta de otra y no necesariamente igual, como en las ecuaciones. Su utilidad radica en que permiten modelar una amplia gama de fenómenos y situaciones del mundo real, donde las relaciones son más flexibles y variables, desde problemas económicos hasta físicos y sociales. Su comprensión es esencial para el análisis y la solución de problemas que implican relaciones de orden entre cantidades variables.

¿Cómo aplicarías el concepto de inecuaciones de primer grado para modelar y resolver problemas económicos que involucren decisiones de inversión o presupuesto limitado?

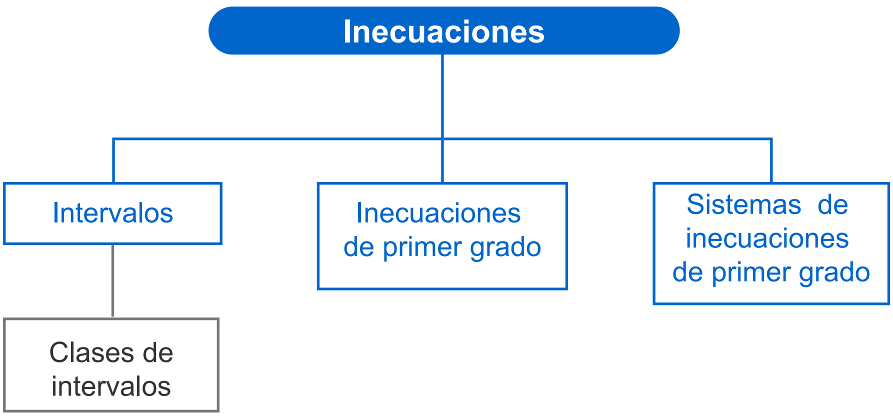
Objetivos de unidad

1. Comprender la relación entre las expresiones algebraicas y las desigualdades, cómo representarlas en notación de conjuntos, intervalos y en una recta numérica o en un plano cartesiano, para la resolución de una amplia variedad de problemas matemáticos con inecuaciones.

2. Realizar operaciones con inecuaciones de primer grado con números reales, considerando sus propiedades y los axiomas de orden de los números reales, para la correcta resolución de los procesos en los que se encuentran involucrados.

3. Aplicar las inecuaciones lineales para resolver problemas del mundo real, como problemas financieros, de optimización, de planificación, de física o sociales, identificando y utilizando las desigualdades adecuadas, para el modelado situaciones reales y la toma de decisiones informadas.

Figura 22.
Temas a trabajar.



Tema 1
Intervalos, clases y operaciones

Definición de intervalo: es un conjunto de números reales comprendidos entre dos valores dados, llamados extremos. Estos valores pueden ser incluidos o excluidos, lo que define diferentes tipos de intervalos.

Tabla 15.
Clases de intervalos, notaciones y gráficos.

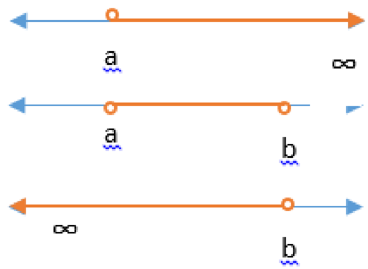
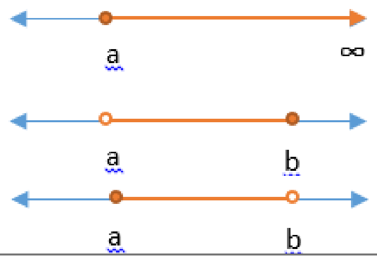
Tipo de intervalo	Notación de Conjunto	Notación de intervalo	Gráfica
Intervalo abierto	$\{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x\}$	(a, ∞)	
	$\{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$	(a, b)	
	$\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < b\}$	$(-\infty, b)$	
Intervalo semi-abierto	$\{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x\}$	$[a, \infty)$	
	$\{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
	$\{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
	$\{x \in \mathbb{R} \,/ x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
Intervalo cerrado	$\{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	

Tabla 16.
Propiedades de las desigualdades: $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$, donde $c \neq 0$

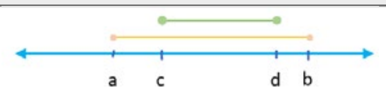
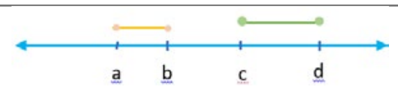
Suma	Multiplicación o división $c \geq 0$	Multiplicación o división $c \leq 0$
$a < b$ y $a + c < b + c$ donde $c \geq 0$	$a < b$ y $a.c < b.c$	$a < b$ y $a.c > b.c$

Operaciones con intervalos: Las operaciones con intervalos implican manipular conjuntos de números reales comprendidos entre ciertos intervalos. Las operaciones más comunes que se realizan con intervalos incluyen la unión y la intersección de conjuntos.

Unión de intervalos: La unión de dos intervalos es el conjunto que contiene todos los números que pertenecen a los intervalos originales.

Si se considera dos intervalos $[a,]$ y $[c,]$ la unión es el intervalo $[a,b] \cup [c,d]$, que contiene todos los números entre a y b y todos los números entre c y d.

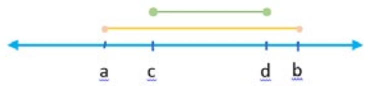
Tabla 17.

Gráfica	Conjunto Solución
	$[a, b] \cup [c, d] = [a, b]$
	$[a, b] \cup [c, d] = [a,$ d]
	$[a, b] \cup [c, d] = [a, b] \cup [c, d]$

Intersección de intervalos: Es el conjunto que contiene los números comunes entre ambos intervalos originales.

Consideres dos intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ encuentre la intersección de los intervalos.

Tabla 18.

Gráfica	Conjunto Solución
	$[a,b]\cap[c,d]$= $[c,d]$
	$[a,\ b]\cap[c,\ d]$= $[c$, b]
	$[a,b]\cap[c,d]$= ø

Ejercicios resueltos

1. Exprese los siguientes intervalos en notación de conjunto e intervalo. Para resolver los ejercicios se debe recordar la notación dada en la tabla 15, considerando las magnitudes.

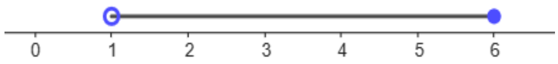
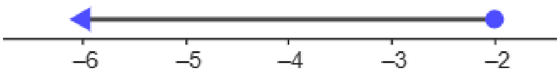
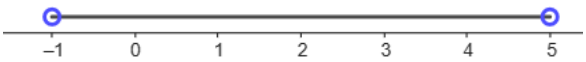
Paso 1. - 4 es menor o igual que x, pertenece a los reales.
Conjunto solución: $\{x \in \ \mathbb{R} : -\mathbf{4} \ \leq x\}$ o $[-4,+\infty)]$

Paso 2. x está entre –2 y 5, ambos no incluidos, pertenece a los reales.
Conjunto solución: $\{x \in \mathbb{R} : -\mathbf{2} < \boldsymbol{x} < 5\}$ o $(-2,5)$

Paso 3. Quito tiene una temperatura que oscila entre 10°C por las noches a 26°C durante el día.
Conjunto solución: $\{x \in temperatura\ /\ 10°C\ \ \leq x \leq 26°C\}$ o $[10°C, 26°C]$

Paso 4. El reporte del clima en las faldas del Chimborazo se registra entre -3 y 8
Conjunto solución: $\{x \in temperatura\ /\ -3°C\ \ \leq x \leq 8°C\}$ o $[-3°C, 8°C]$

2. Escriba el intervalo dada la gráfica:

Gráfica de intervalo	Notación de intervalo	Expresión analítica
	$(1,6]$	$1 < x \leq 6$
	$(-\infty,-2]$	$x \leq -2$
	$(-1,5)$	$-1 < x < 5$

3. Demuestre que si x ∈ $[-1{,}5]$ entonces 3x-4 ∈ $[-8{,}3]$:

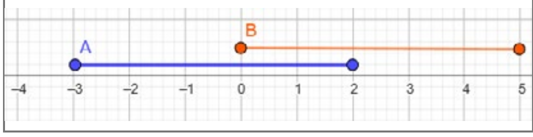
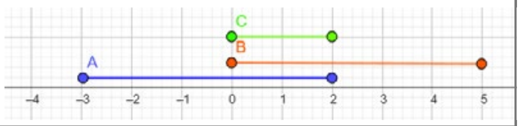
Paso1. Para demostrar escribimos mi primera parte como notación analítica $-1 < x \leq 5$

Paso 2. Multiplicamos a la desigualdad por 3 de donde se tiene
$-3 < 3x \leq 15$

Paso 3. Restamos a la desigualdad 4 $-3-4 < 3x-4 \leq 15-4$

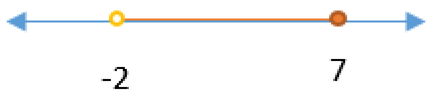
Paso 4. Resolviendo términos semejantes se tiene el conjunto solución
$-7 < 3x-4 \leq 11$
3x-4 ∈ $[-7{,}11]$, lo dado es falso.

4. Realizar la operación de intervalos (A∪B) con los siguientes intervalos A = [-3,2] B = [0,5], graficar.

A. La intersección de los intervalos es:	**B.** La solución [0,2]
	

Ejercicios propuestos

1. Empareje cada intervalo con su respuesta correcta.

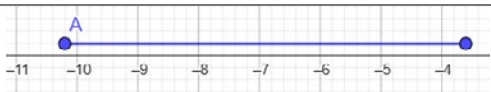
A. $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq -10\}$	1. $(-\infty, 3)$
B. $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 \leq x < 11\}$	2. $\left(-\frac{5}{3}, +\infty\right)$
C. $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 3\}$	3. $(-\infty, -10]$
D. $\{x \in \mathbb{R} \,/ x \geq 9/2\}$	4. $[4.5, +\infty)$
E. $\left\{x \in \mathbb{R} \,/ -2 < x \leq \frac{21}{3}\right\}$	5. 
F. $\left\{x \in \mathbb{R} \,/ x > -1.\hat{6}\right\}$	6. 

2. Expresa los siguientes intervalos en notación de conjunto.

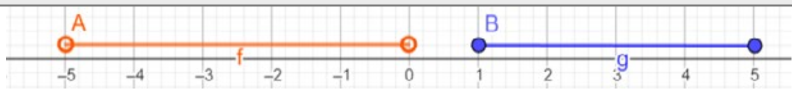
a) Según la OMS el rango de edad de los llamado menores oscila entre 0 y los 17 años

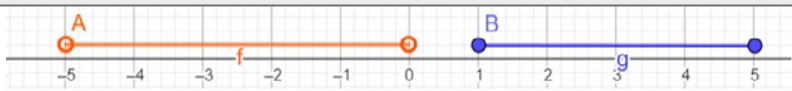
b) El peso promedio de niños de 1 años está entre 7.9 y 10.1 Kg.

3. Complete los espacios en blanco.

Gráfica de intervalo	**Notación de intervalo**	**Expresión analítica**
	$(-\infty, \sqrt{9}]$	
		$-\frac{4}{5} \leq x < 5.3$
		

4 Realizar la operación de intervalos (A∩B), (A∪B), con los siguientes intervalos A = (-5,0), B = [1,5], graficar.

A. La intersección de los intervalos es:	Conjunto Solución
	

B. La intersección de los intervalos es:	Conjunto Solución
	

Respuestas en la página 239

Tema 2
Inecuaciones y sistemas de inecuaciones de primer grado

Definición de inecuación de primer grado: Es una desigualdad que puede escribirse en la forma $ax + b < 0,\ ax + b > 0$, donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

Para resolver una inecuación de primer grado que involucra una variable se debe encontrar todos los valores de la variable para los cuales la inecuación es verdadera.

Para saber:

- Si en el resultado final se tiene un ejemplo así -11 > -1, no hay ninguna solución posible para la desigualdad. Por lo tanto, el conjunto solución es vacío, lo que significa que no hay elementos que satisfagan la desigualdad.

- Si en el resultado se obtiene este tipo de desigualdad -11 < -1, dado que esto es verdadero para todos los números reales x, la solución es (-∞,+∞).

Aplicaciones: Además de las expresiones familiares, menor que y mayor que, existen algunas tales como no es mayor que, al menos, entre otras, que también indican desigualdad.

Tabla 19.
Expresiones verbales de signos matemáticos.

Expresión verbal	Interpretación	Expresión verbal	Interpretación
a es al menos b a no es menos de b	$a \geq b$ $a \geq b$	a es a lo más b a no es más de b	$a \leq b$ $a \leq b$

Para resolver un problema con inecuaciones seguimos los siguientes pasos:

1. Se realiza varias lecturas y se diferencia los datos de las incógnitas.
2. Se escribe la inecuación.
3. Se resuelve la inecuación resultante.
4. Se resuelve el problema, contestando a las preguntas que en él se plantean.
5. Se comprueba las soluciones obtenidas, quitando aquellas que no tienen sentido dentro del problema.

Ejercicios resueltos

1. Resuelva la siguiente inecuación: $2x + 5 < x + 7$
   Para resolver la inecuación se sigue los siguientes pasos:

   Paso 1. Se reorganiza la inecuación, colocando la variable a un lado y el término numérico al otro, por medio de propiedades de la suma y resta: $2x - x < 7 - 5$

   Paso 2. Se simplifica términos semejantes, por lo que, el conjunto solución es: $x < 2$ o $(-\infty, 2)$

   Paso 3. Adicionalmente, se comprueba el resultado, sustituyendo dos valores a la variable, uno que pertenezca al conjunto solución y otro que no pertenezca.

X=0	X=3
$2(0) + 5 < 0 + 7$ $5 < 7$ verdadero	$2(3) + 5 < 3 + 7$ $11 < 10$ falso

Ciudadanía digital

Abra el siguiente enlace:

https://www.desmos.com/calculator?lang=es

Ingrese la ecuación:
2x+5 <x+7 y

Luego compare con la respuesta del libro.

2. Resuelva la siguiente inecuación: $5(2x - 1 \; > 3(4 - x)$

Para resolver la inecuación se sigue los siguientes pasos:

Paso 1. Se desarrolla la propiedad distributiva

$(10x - 5 \; > (12 - 3x)$

Paso 2. Se reorganizas la inecuación, colocando la variable a un lado y el término numérico al otro, por medio de propiedades de la suma y resta de desigualdades se tiene.

$10x + 3x \; > 12 + 5$ $\qquad$ $11x \; > 17$

Paso 3. Al simplificar términos semejantes, se obtiene que el conjunto solución es:

$x \; > \frac{17}{11}$ o $(1,\widehat{54}\,; +\infty)$

3. Resuelva la siguiente inecuación: $\frac{x+2}{7} < \frac{3(x-5)}{8}$

Para resolver la inecuación se sigue los siguientes pasos:

Paso 1. Se elimina los denominadores multiplicando a ambos lados de la desigualdad, el mínimo común múltiplo de los denominadores es en este caso 56:

$$56 * \frac{x+2}{7} < 56 * \frac{3(x-5)}{8}$$

Paso 2. Se simplifica la expresión anterior:

$8 * (x + 2) < 7 * 3(x - 5)$

Paso 3. Se multiplica los términos aplicando la propiedad distributiva a ambos lados: $8x + 16 \; < 21x - 105$

Paso 4. Se reorganiza la inecuación, colocando la variable a un lado y el término numérico al otro, por medio de propiedades suma de inecuaciones: $121 < 13x$

Paso 5. Se aplica la propiedad cancelativa: $\frac{121}{13} < x$

Paso 6. Se realiza la división y se obtiene el resultado: $9.31 < x$

Paso 7. El conjunto solución es: $x > 9.31$ o $(9.31, +\infty)$

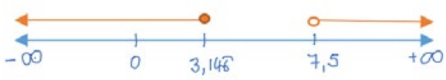
4. Resuelva el siguiente sistema de inecuación:
$$\begin{cases} 1.4x + 3.2 \geq -x - 5 \\ 5 - x < -2.5 \end{cases}$$

Para resolver el sistema de inecuación se sigue los siguientes pasos:

Paso 1. Se desarrolla las inecuaciones por separado:

$1.4x + 3.2 \geq -x - 5$	$5 - x < -2.5$	Se reorganiza la inecuación, colocando la variable a un lado y el término numérico al otro.
$-2.4x \geq -8.2$	$-x < -7.5$	Se multiplica por -1 y se cambia el sentido
$x \leq \frac{8.2}{2.4}$	$x > 7.5$	Se despeja si así lo amerita
$x \leq 3.14\hat{6}$	$x > 7.5$	Resultados

Paso 2. Se realiza las gráficas:



Paso 3. Se toma como solución la intersección de las soluciones, es decir, las zonas que sean comunes a todas las rectas. En este caso no hay intersección, por lo que, su CS= ø.

5. Un estudiante necesita al menos un promedio de 70 para pasar su curso de matemáticas. Actualmente, tiene un promedio de 64.5 en sus exámenes. Tiene un último examen para mejorar su promedio. Si el último examen tiene un valor máximo de 100 puntos, ¿cuántos puntos necesita obtener en el último examen para aprobar el curso?

Método de resolución

Paso 1. Se define la variable: x= puntos en el último examen

Paso 2. Se escribe la inecuación que describe el problema:
$\frac{64.5+x}{2} \geq 70$

Paso 3. Se multiplica ambos lados de la desigualdad por 2 para eliminar el denominador: $2 * \frac{64.5+x}{2} \geq 2 * 70$

Paso 4. Se simplifica la desigualdad: $64.5 + x \geq 140$

Paso 5. Se resuelve la desigualdad:
$x \geq 140 - 64.5$
$x \geq 75.5$

Paso 6. Se interpreta los resultados: El estudiante necesita obtener al menos una nota de 75.5 en el último examen para aprobar el curso.

Interdisciplinariedad

¿Cómo puedes usar inecuaciones para establecer límites de seguridad en las contraseñas? Por ejemplo, si una contraseña debe tener al menos 8 caracteres y no más de 16, ¿cómo se representaría esto con una inecuación?

Ejercicios propuestos

1. Dada la inecuación $2x - 8 < -12$

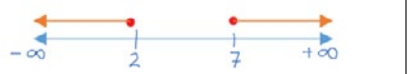
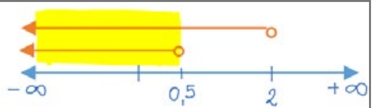
a) Compruebe si son posibles soluciones x=-2, x=0, x=2

b) Resuelva y dibuje en la recta la solución.

2. Resuelva las siguientes inecuaciones:

$(3t + 4) \leq 8$		$5(m + 4) \leq 5m - 8$	
$4x - 5 \geq 13 + 4x$		$12(y + 2) > -3(2y) - 12$	
$-3(x - 2) \geq 6(-x + 4)$		$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} > 2x + \frac{1}{6}$	

3. Resuelva el siguiente sistema de inecuación, luego coloque la solución y su gráfica:

Sistema de inecuaciones	**Solución**	**Grafica**
$\begin{cases} 5x - 4 \leq 2x + 2 \\ 3x - 8 \geq x + 6 \end{cases}$		
$\begin{cases} 9x + x < 5 \\ 1 + 3x < 2x + 3 \end{cases}$		
$\begin{cases} 3x + 1.2 \leq x - 5 \\ 5 + x > -2.4 \end{cases}$		

4. En un curso de matemáticas de la carrera de Economía unos alumnos obtuvieron puntuaciones de 13.45 y 15.36 en sus dos primeros exámenes de matemática básica. ¿Qué puntuación deben obtener en el tercer examen conjunto para lograr una media de 14 o más?

5. Una empresa tiene un presupuesto para publicidad en dos plataformas, Google Ads y Facebook Ads. El triple del gasto en Google Ads menos $300 debe ser menor que el doble del gasto en Facebook Ads más $500. Resuelva la inecuación para determinar el gasto máximo en Google Ads si el gasto en Facebook Ads es de $800.

6. La altitud de la Montaña Rocosa es desconocida y se representa por la variable x. Se sabe que su altitud está por debajo de 5000 msnm, pero por encima de 3000 msnm. Además, se sabe que la altitud de Montaña Rocosa es al menos 1000 metros más alta que la altitud de la Montaña de Colores, que tiene una altitud de 2200 metros. ¿Cuál es el rango posible para la altitud de la montaña Rocosa?

Respuestas en la página 240

Capítulo 09

Inecuaciones de segundo grado, polinómicas, racionales e irracionales

Figura 23.
Escritura en el pizarrón de una función no lineal

Explicación de funciones no lineales. Tomada de Freepik 2024, https://n9.cl/2aokg.

En economía, al principio se modela situaciones económicas usando inecuaciones lineales, como una manera de representar las relaciones entre variables. Sin embargo, algunos fenómenos económicos no se ajustan adecuadamente a líneas rectas. En muchos casos, las relaciones entre variables económicas no son lineales, es decir, se representan mediante curvas polinómicas, racionales, u otras formas que capturan la complejidad cuando los cambios no son constantes ni proporcionales. Estos modelos ofrecen una representación más precisa de los fenómenos.

Las inecuaciones no lineales en economía se aplican para maximizar utilidades, comprender la elasticidad de la demanda y analizar el crecimiento económico.

Entonces, ¿qué será necesario aprender para utilizar estas nuevas herramientas matemáticas?

Objetivos de unidad

1. Comprender los conceptos fundamentales relacionados con inecuaciones polinómicas, racionales e irracionales, explicando cómo se aplican en diferentes contextos y su importancia en el análisis matemático.

2. Diferenciar entre los tipos de inecuaciones, mediante la clasificación de sus características y propiedades, para la demostración de la capacidad de reconocer patrones y estructuras en cada tipo.

3. Resolver inecuaciones polinómicas, utilizando la factorización e identificación de intervalos críticos, mostrando el proceso paso a paso y explicando cómo estas estrategias ayudan a encontrar soluciones válidas y precisas.

4. Resolver inecuaciones racionales, comprendiendo las restricciones de dominio que surgen de las soluciones obtenidas y explicando por qué ciertos valores no pueden ser parte del conjunto solución debido a la naturaleza de las fracciones algebraicas.

5. Resolver inecuaciones irracionales, utilizando técnicas de simplificación algebraica y explicando cómo estas estrategias ayudan a manipular las expresiones, para el facilitamiento de la interpretación de las soluciones y su representación gráfica.

Figura 24.
Temas a trabajar.

Tema 1
Inecuaciones polinómicas

Este tipo de inecuaciones incluye términos de grado mayor a uno y tiene la forma $P(x) > 0$. El símbolo $>$ puede ser $<$, $\geq$ o $\leq$ y $\mathrm{P}(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_2 x^2 + p_1 \mathrm{x} + p_0$ donde p_i son constantes y x la variable.

Para resolver este tipo de inecuaciones, se sigue varios pasos. A continuación, se explica cada paso para la resolución de la inecuación $2x^2 > x + 6$ a manera de ejemplo.

Paso 1. Asegure que el lado derecho de la inecuación sea cero. Caso contrario, aplique las operaciones necesarias para que el lado izquierdo tenga la expresión polinómica en la forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ y el lado derecho sea cero. Así, si se tiene la inecuación $2x^2 > x + 6$, puede expresarse como $2x^2 - x - 6 > 0$ para asegurar que el lado derecho sea cero.

Paso 2. Determine las raíces del polinomio del lado izquierdo de la inecuación, de ahora en adelante se denominarán "números críticos" (Leithold, 1994). Es decir, resuelva la ecuación $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$. Para la inecuación $2x^2-x-6>0$, los valores críticos se obtienen factorizando la expresión como $(2x+3)(x-2)=0$, lo que da $x_1=-3/2$ y $x_2=2$. Vale señalar que, se trabaja únicamente con números críticos que pertenezcan a los números reales.

Paso 3. Ordene las raíces en forma ascendente $(x_1 < x_2 < \cdots < x_n)$ y cree los siguientes intervalos:

$$(-\infty, x_1),\ (x_1, x_2), \ldots (x_i, x_{i+1}), \ldots (x_n, \infty)$$

Si la inecuación es $\geq$ o $\leq$, los intervalos son cerrados (fíjese en el uso de corchetes):

$$(-\infty, x_1],\ [x_1, x_2], \ldots [x_i, x_{i+1}], \ldots [x_n, \infty)$$

Para la inecuación $2x^2 - x - 6 > 0$, los intervalos son:

$$\left(-\infty, -\tfrac{3}{2}\right), \left(-\tfrac{3}{2}, 2\right) \text{ y } (2, \infty).$$

Paso 4. Elija "números de prueba" (Leithold, 1994, p. 122) en cada intervalo y con ellos evalúe el signo de la expresión polinómica en cada uno. Si la inecuación es $>$ o $\geq$ a cero, la solución son los intervalos donde el signo es positivo $(+)$ y en el caso de que la inecuación sea $<$ o $\leq$ a cero, la solución son los intervalos donde el signo es negativo $(-)$.

Para la inecuación $2x^2 - x - 6 > 0$ y los intervalos dados, puede construirse la siguiente tabla para encontrar la solución de la inecuación.

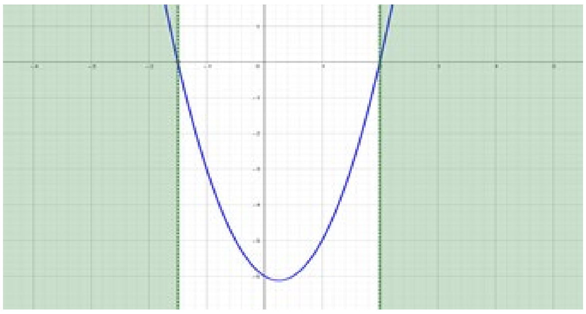
Tabla 20.

Intervalos	**Número de prueba**	**Evaluación del polinomio $2x^2 - x - 6$**	**Signo polinomio**	**Solución > 0**
$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$	-2	$2(-2)^2 - (-2) - 6$ $= 4$	$(+)$	Si
$\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$	0	$2(0)^2 - (0) - 6$ $= -6$	$(-)$	No
$(2, \infty)$	4	$2(4)^2 - (4) - 6$ $= 22$	$(+)$	Si

La evaluación muestra que los intervalos donde la expresión es positiva son $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ y $(2, \infty)$, por lo que el conjunto de soluciones es $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (2, \infty)$.

Gráficamente la solución de esta inecuación se muestra sombreada en la figura 25:

Figura 25



En la figura, note que la región sombreada coincide cuando la línea azul está por sobre el eje x.

Las inecuaciones cuadráticas pertenecen un tipo particular de inecuaciones polinómicas representadas por $ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son coeficientes constantes y x la variable. Ofrecen varias estrategias de resolución. Aparte de la factorización estándar, que es útil cuando la expresión es factorizable, se puede emplear la fórmula cuadrática para hallar los números críticos.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1.

Resuelva la inecuación $5x^2 + 17x \leq 12$.
Siguiendo los pasos indicados se tiene:

Paso 1. Asegure que el lado derecho de la inecuación sea cero: $5x^2 + 17x - 12 \leq 0$.

Paso 2. Se aplica la ecuación cuadrática $x_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4(5)(12)}}{2(5)}$ y se tiene los números críticos: $x_1 = -4$ y $x_2 = \frac{3}{5}$.

Paso 3. Obtenidos los números críticos, se define los intervalos:

$$(-\infty, -4],\ \left[-4, \frac{3}{5}\right],\ \left[\frac{3}{5}, \infty\right)$$

Paso 4. Se construye la tabla:

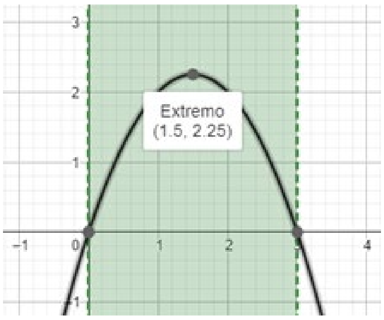
Intervalos	**Número de prueba**	**Evaluación del polinomio** $\mathbf{5x^2 + 17x - 12}$	**Signo polinomio**	**Solución** $\leq \mathbf{0}$
$(-\infty, -4]$	-5	$5(-5)^2 + 17(-5) - 12 = 28$	$(+)$	No
$\left[-4, \frac{3}{5}\right]$	0	$5(0)^2 + 17(0) - 12 = -12$	$(-)$	Si
$\left[\frac{3}{5}, \infty\right)$	1	$5(1)^2 + 17(1) - 6 = 16$	$(+)$	No

El conjunto solución de la inecuación es $\left[-4, \frac{3}{5}\right]$.

Ejercicio 2.

Encuentre la inecuación que se representa en la figura 26:

Figura 26.



Los puntos críticos (o raíces) en la figura son $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$. Para construir la ecuación cuadrática, se realiza el producto $(x - 0)(x - 3)$ que resulta en $x^2 - 3x$. Dado que, es una parábola con punto máximo, invertimos la ecuación cuadrática a $-x^2 + 3x$, verificando el punto extremo en la figura.

Para construir la inecuación, observe que la región sombreada está entre los valores $x = 0$ y $x = 3$, representada por líneas entrecortadas, lo que indica el intervalo $(0,3)$. Además, este intervalo coincide cuando la parábola está por encima del eje x. Por estos motivos, la inecuación es $-x^2 + 3x > 0$.

Ejercicio 3.

Resuelva la inecuación $2x^3 + 5x^2 + 10 \geq 23x$.

Siguiendo los pasos indicados se tiene:

Paso 1. Asegure que sea cero el lado derecho de la inecuación:

$$2x^3 + 5x^2 - 23x + 10 \geq 0.$$

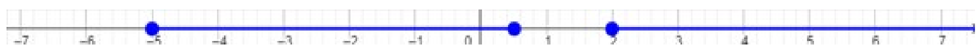
Paso 2. Factorice por Ruffini el lado izquierdo de la inecuación: $(2x-1)(x-2)(x+5) \geq 0$, obteniendo los números críticos: $x_1 = -5$, $x_2 = \frac{1}{2}$ y $x_3 = 2$.

Paso 3. Obtenidos los números críticos, se crea los intervalos: $(-\infty, -5]$, $\left[-5, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$, $[2, \infty)$

Paso 4. Se construye la tabla:

Intervalos	**Número de prueba**	**Evaluación del polinomio** $\mathbf{2x^3 + 5x^2 - 23x + 10}$	**Signo polinomio**	**Solución** $\geq \mathbf{0}$
$(-\infty, -5]$	-6	$2(-6)^3 + 5(-6)^2 - 23(-6) + 10 = -104$	$(-)$	No
$\left[-5, \frac{1}{2}\right]$	0	$2(0)^3 + 5(0)^2 - 23(0) + 10 = 10$	$(+)$	Si
$\left[\frac{1}{2}, 2\right]$	1	$2(1)^3 + 5(1)^2 - 23(1) + 10 = -6$	$(-)$	No
$[2, \infty)$	3	$2(3)^3 + 5(3)^2 - 23(3) + 10 = 40$	$(-)$	Si

El conjunto solución de la inecuación es $\left[-5, \frac{1}{2}\right] \cup [2, \infty)$.



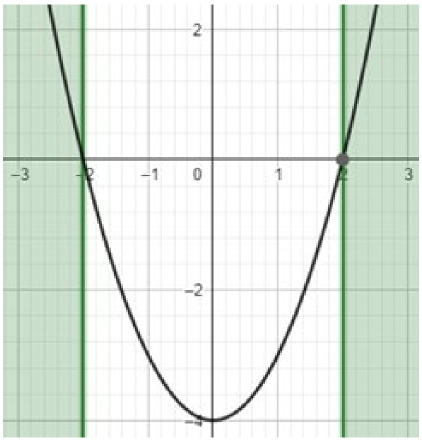
Ejercicios propuestos

Obtenga el conjunto de soluciones en los siguientes ejercicios:

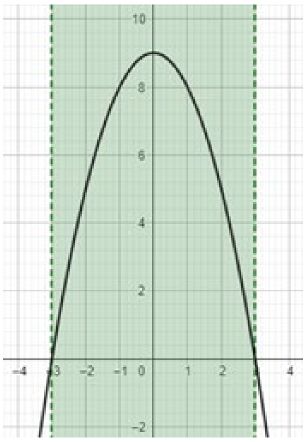
1. $x^2 > 25.$
2. $x^2 \leq 36.$
3. $x^2 - 2x \leq 15.$
4. $x^2 + 3 \geq 4x.$
5. $6x^2 - 19x - 7 > 0.$
6. $2x(2x - 2) < 20.$
7. $x(3x - 16) > 35.$
8. $x^3 - 5x^2 + 4x + 6 > 0.$
9. $3x^5 + 4x^2 > x^4 + 12x^3.$
10. $3x^5 + 4x^2 \geq x^4 + 12x^3.$
11. $(x^2 - 1)(2x^2 - 5) \geq 0.$
12. $2x^4 + 5 < 7x^2.$
13. $x^6 + \frac{9}{4}x^2 > \frac{13}{4}x^4.$
14. $\left(x^2 - \frac{9}{4}\right)(x^2 - 1)x^2 \geq 0.$
15. $x^4 - 10x^4 + 9 \geq 0.$

Construya la inecuación basándose en los gráficos dados:

16.



17.



Resuelva los siguientes problemas de aplicación:

18. Una empresa fabricante de televisores vende cada unidad a 250.00 USD y tiene un modelo de costos diarios de producción expresado por la función $x^2 + 175x + 900$, donde x representa la cantidad de unidades producidas por día. ¿Cuántas unidades debe producir la empresa diariamente para obtener utilidades?

19. Las ganancias en millones de dólares por la exportación de camarón se modelan con la función $G(x) = x^5 - \frac{25}{16}x^3$, donde x representa los cientos de millones de libras de camarón exportados. Determine el rango de producción para el cual no se generan ganancias.

Respuestas en la página 242

Tema 2
Inecuaciones racionales

Las inecuaciones irracionales tienen la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de x y el símbolo $>$ puede cambiarse por $<, \geq$ o $\leq$.

La resolución es similar a la de las inecuaciones polinómicas, pero se deben tener en cuenta algunas consideraciones importantes:

- No simplifique la expresión después de factorizar el numerador y denominador. El objetivo es estructurar completamente la solución, incluso si la expresión no se simplifica.

- Los números críticos del polinomio del denominador Q(x) deben ser tratados como restrictivos o abiertos en la solución final de la inecuación. Esto se debe a que, el denominador no puede ser cero.

Es fundamental recordar que, las inecuaciones racionales presentan un desafío, debido a los puntos donde el denominador se anula, que constituyen puntos de discontinuidad. Estos puntos deben manejarse con precaución, ya que, la naturaleza de la inecuación puede cambiar en las vecindades de estos puntos.

Para resolver este problema, es indispensable identificar y analizar meticulosamente estos puntos de discontinuidad, considerándolos como límites en la solución final. Este enfoque garantiza una solución válida y coherente, teniendo en cuenta las posibles discontinuidades en la función racional.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1.

Resolver la inecuación $\frac{3x^5-x^4-12x^3+4x^2}{16-x^2} \geq 0$, siguiendo los pasos de resolución de inecuaciones polinómicas. Para ello se sigue este orden:

Paso 1. Se identifica que lado derecho de la inecuación ya es cero: $\frac{3x^5-x^4-12x^3+4x^2}{16-x^2} \geq 0$

Paso 2. Se factoriza tanto el numerador y el denominador: $\frac{x^2(3x-1)(x+2)(x-2)}{(4+x)(4-x)} \geq 0$ y se identifica los números críticos: $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{1}{3}$, $x_5 = 2$ y $x_6 = 4$.

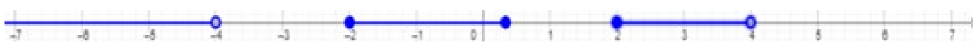
Paso 3. Se construye los intervalos. Vale señalar que, los números críticos $x_1 = -4$ y $x_6 = 4$ son restrictivos o abiertos, ya que, hacen cero al denominador.

$$(-\infty,-4),\ (-4,-2],\ [-2,0],\ \left[0,\frac{1}{3}\right],\ \left[\frac{1}{3},2\right],\ [2,4),\ (4,\infty)$$

Paso 4. Se construye la tabla.

Intervalos	Número de prueba	Evaluación de la expresión $\dfrac{\boldsymbol{x^2(3x-1)(x+2)(x-2)}}{\boldsymbol{(4+x)(4-x)}}$	Signo expresión	Solución $\geq \mathbf{0}$
$(-\infty,-4)$	-5	$\dfrac{(-5)^2(3(-5)-1)\big((-5)+2\big)\big((-5)-2\big)}{\big(4+(-5)\big)\big(4-(-5)\big)}=\dfrac{2800}{3}$	$(+)$	Si
$(-4,-2]$	-3	$\dfrac{(-3)^2(3(-3)-1)\big((-3)+2\big)\big((-3)-2\big)}{\big(4+(-3)\big)\big(4-(-3)\big)}=\dfrac{-450}{7}$	$(-)$	No
$[-2,0]$	-1	$\dfrac{(-1)^2(3(-1)-1)\big((-1)+2\big)\big((-1)-2\big)}{\big(4+(-1)\big)\big(4-(-1)\big)}=\dfrac{4}{5}$	$(+)$	Si
$\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(3\left(\frac{1}{5}\right)-1\right)\left(\left(\frac{1}{5}\right)+2\right)\left(\left(\frac{1}{5}\right)-2\right)}{\left(4+\left(\frac{1}{5}\right)\right)\left(4-\left(\frac{1}{5}\right)\right)}=0.004$	$(+)$	Si
$\left[\dfrac{1}{3},2\right]$	1	$\dfrac{(1)^2(3(1)-1)\big((1)+2\big)\big((1)-2\big)}{\big(4+(1)\big)\big(4-(1)\big)}=\dfrac{-2}{5}$	$(-)$	No
$[2,4)$	3	$\dfrac{(3)^2(3(3)-1)\big((3)+2\big)\big((3)-2\big)}{\big(4+(3)\big)\big(4-(3)\big)}=\dfrac{360}{7}$	$(+)$	Si
$(4,\infty)$	5	$\dfrac{(5)^2(3(5)-1)\big((5)+2\big)\big((5)-2\big)}{\big(4+(5)\big)\big(4-(5)\big)}=\dfrac{-2450}{3}$	$(-)$	No

El conjunto solución de la inecuación es $(-\infty,4)\cup\left[-2,\frac{1}{3}\right]\cup[2,4)$.



Ejercicio 2.

Resuelva la inecuación $\frac{32x-12}{3-x} \leq 5x$, aplicando los pasos de resolución de inecuaciones polinómicas:

Paso 1. Asegure que el lado derecho de la inecuación sea cero. Aplicando operaciones algebraicas la inecuación resulta: $\frac{5x^2+17x-12}{3-x} \leq 0$

Paso 2. Aplique la ecuación cuadrática en el numerador. Considerando que el denominador no se factoriza, se tiene: $\frac{\left(x-\frac{3}{5}\right)(x+4)}{(3-x)} \leq 0$.

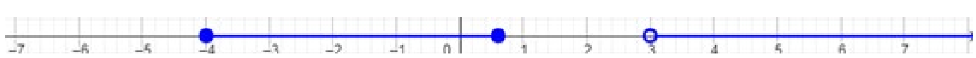
Se tiene los números críticos $x_1 = -4$, $x_2 = \frac{3}{5}$ y $x_3 = 3$.

Paso 3. Se construye los intervalos. Nótese que el número crítico $x_3 = 3$ es restrictivo o abierto, ya que, hace cero al denominador.
$(-\infty, -4]$, $\left[-4, \frac{3}{5}\right]$, $\left[\frac{3}{5}, 3\right)$, $(3, \infty)$

Paso 4. Se construye la tabla.

Intervalos	Número de prueba	Evaluación de la expresión $\frac{\left(x-\frac{3}{5}\right)(x+4)}{(3-x)}$	Signo expresión	Solución ≤ 0
$(-\infty, -4]$	-5	$\frac{\left((-5)-\frac{3}{5}\right)((-5)+4)}{(3-(-5))} = \frac{7}{10}$	$(+)$	No
$\left[-4, \frac{3}{5}\right]$	0	$\frac{\left((0)-\frac{3}{5}\right)((0)+4)}{(3-(0))} = -\frac{4}{5}$	$(-)$	Si
$\left[\frac{3}{5}, 3\right)$	1	$\frac{\left((1)-\frac{3}{5}\right)((1)+4)}{(3-(1))} = 1$	$(+)$	No
$(3, \infty)$	4	$\frac{\left((4)-\frac{3}{5}\right)((4)+4)}{(3-(4))} = -\frac{136}{5}$	$(-)$	Si

El conjunto solución de la inecuación es $\left[-4, \frac{3}{5}\right] \cup (3, \infty)$.



Ejercicios propuestos

Obtenga el conjunto de soluciones en los siguientes ejercicios:

1. $\frac{x+5}{x^2-2x-15} > 0.$

2. $\frac{x+5}{x^2-2x-15} \geq 0.$

3. $\frac{x^2-4x+3}{x-2} < 0.$

4. $\frac{x-2}{x^2-4x+3} \leq 0.$

5. Una empresa manufacturera modela sus ingresos y costos en millones de dólares según las funciones $I(x) = \frac{5x-7}{x+1}$ y $C(x) = x - 2$, donde x representa los cientos de unidades producidas. Determine el rango de producción que genera ganancias para esta empresa.

Respuestas en la página 243

Tema 3
Inecuaciones irracionales

Las inecuaciones irracionales involucran radicales y se representan por la forma $\sqrt[n]{Q(x)} > R(x)$, donde n es el índice del radical y $Q(x)$ y $R(x)$ son expresiones en x.

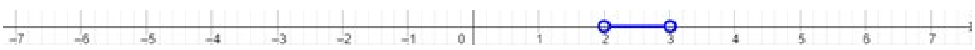
Para resolver este tipo de inecuaciones, se sigue los siguientes pasos. Es importante saber que, se sigue usando $\sqrt{x-3} > x$ como ejemplo.

Paso 1. Se obtiene el intervalo de valores admisibles o IVA para las expresiones racionales con índice n par. Esto implica resolver $Q(x) \geq 0$ si n par. Para $\sqrt{x+6} > x$, el IVA se obtiene de $x + 6 \ \geq 0$, resultando en IVA= $[-6, \infty)$.

Paso 2. Se elimina los radicales, aplicando la propiedad de si $\mathrm{a}, \mathrm{b} \ \geq 0$ y $a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$, para obtener la solución particular (SP). Al eliminar el radical de $\sqrt{x+6} > x$, obtenemos $x \in (0, \infty)$, lo que transforma la inecuación en $\mathrm{x} - 6 > x^2$ ó $x^2 - \mathrm{x} + 6 < 0$. Resolviendo esta inecuación polinómica se obtiene la SP $= (2{,}3)$.

Paso 3. Se observa la intersección entre el IVA y la SP para obtener la solución total. De modo que, si IVA $= [-6, \infty)$ y SP $= (2{,}3)$, entonces IVA ∩ SP $= (2{,}3)$.

Paso 4. Se realiza un análisis de la solución para verificar si cumple con la inecuación dada. Así, al verificar la solución $\mathrm{x} \ \in (2{,}3)$ con $\sqrt{x+6} > x$, se puede confirmar que $\frac{5}{2} \in (2{,}3)$ sí satisface la inecuación. Por lo tanto, el conjunto solución es $(2{,}3)$ $(Hijuelos\ A., 1997)$.



Ejercicios resueltos:

Ejercicio 1.

Resuelva la inecuación $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-3} \ < 3$.
Siguiendo los pasos indicados:

Paso 1. Se obtiene el IVA resolviendo $x + 4 \geq 0 \ \cap \ x - 3 \geq 0$, lo que resulta en IVA $= [3, \infty)$.

Paso 2. Para eliminar los radicales, se realiza las siguientes operaciones:

$$\sqrt{x+4} < 3-\sqrt{x-3}$$
$$\left(\sqrt{x+4}\right)^2 < \left(3-\sqrt{x-3}\right)^2$$
$$x+4 < 9-6\sqrt{x-3}+(x-3)$$
$$6\sqrt{x-3} < 2$$
$$\sqrt{x-3} < \frac{1}{3}$$
$$\left(\sqrt{x-3}\right)^2 < \left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$x-3 < \frac{1}{9}$$
$$x < \frac{28}{9}$$

La SP es $\left(-\infty,\frac{28}{9}\right)$

Paso 3. La intersección entre IVA y SP es $[3,\frac{28}{9})$

Paso 4. Al verificar $x=3$, se cumple $\sqrt{3+4}+\sqrt{3-3} < 3 \Rightarrow \sqrt{7} < 3$, y al tomar $x=\frac{31}{10}$, se verifica $\sqrt{\frac{31}{10}+4}+\sqrt{\frac{31}{10}-3} < 3 \Rightarrow 2.9808 < 3$. Note que $\frac{31}{10}$ es ligeramente menor a $\frac{28}{9}$. Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación es $[3,\frac{28}{9})$.

Ejercicio 2.

Resuelva la inecuación $\sqrt[4]{3-x}+\sqrt{x-2} \geq \mathrm{x}-5$, siguiendo los pasos indicados:

Paso 1. Se obtiene el IVA resolviendo $3-x \geq 0 \cap x-2 \geq 0$, lo que resulta en IVA $=[2{,}3]$.

Paso 2. En lugar de eliminar los radicales, se analiza los signos de las partes de la inecuación. Dado el IVA $2 \leq x \leq 3$, se construye el lado izquierdo de la inecuación como $-3 \leq x-5 \leq -2$, donde $(x-5)<0$.

Se observa: $\underbrace{\sqrt[4]{3-x}+\sqrt{x-2}}_{positivo} \geq \underbrace{x-5}_{negativo}$

La inecuación se cumple, ya que una expresión positiva siempre es mayor que una negativa. Por lo tanto, SP $=\mathbb{R}^{+}$.

Paso 3. La intersección entre IVA y SP es $[2,3]$.

Paso 4. Al tomar $x=2$, se verifica que $\sqrt[4]{3-2}+\sqrt{2-2} \geq x-5 \Rightarrow 1 \geq -3$, y para $x=3$ se verifica $\sqrt[4]{3-3}+\sqrt{3-2} \geq 3-5 \Rightarrow 1 \geq -2$. Así, el conjunto solución de la inecuación es $[2,3]$.

Ejercicios propuestos

Obtenga el conjunto de soluciones en los siguientes ejercicios:

1. $\sqrt{x+10}<x$.

2. $\sqrt{x^2+2x-3}<\sqrt{5}$.

3. $\sqrt{5}<\sqrt{(x+3)(x-1)}$.

4. $\sqrt{x^2+2x-8} \geq \sqrt{7}$.

5. $\sqrt{x^2-1} \geq x+3$.

6. $\sqrt{x^2-1}>x-3$.

7. $\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}>3$.

8. $\sqrt{\mathrm{x}+2}+\sqrt{\mathrm{x}-4} \leq 6$.

9. $\sqrt{\mathrm{x}+1}+\sqrt{\mathrm{x}-3}>4$.

10. $\sqrt{x^2-4} \geq x-1$.

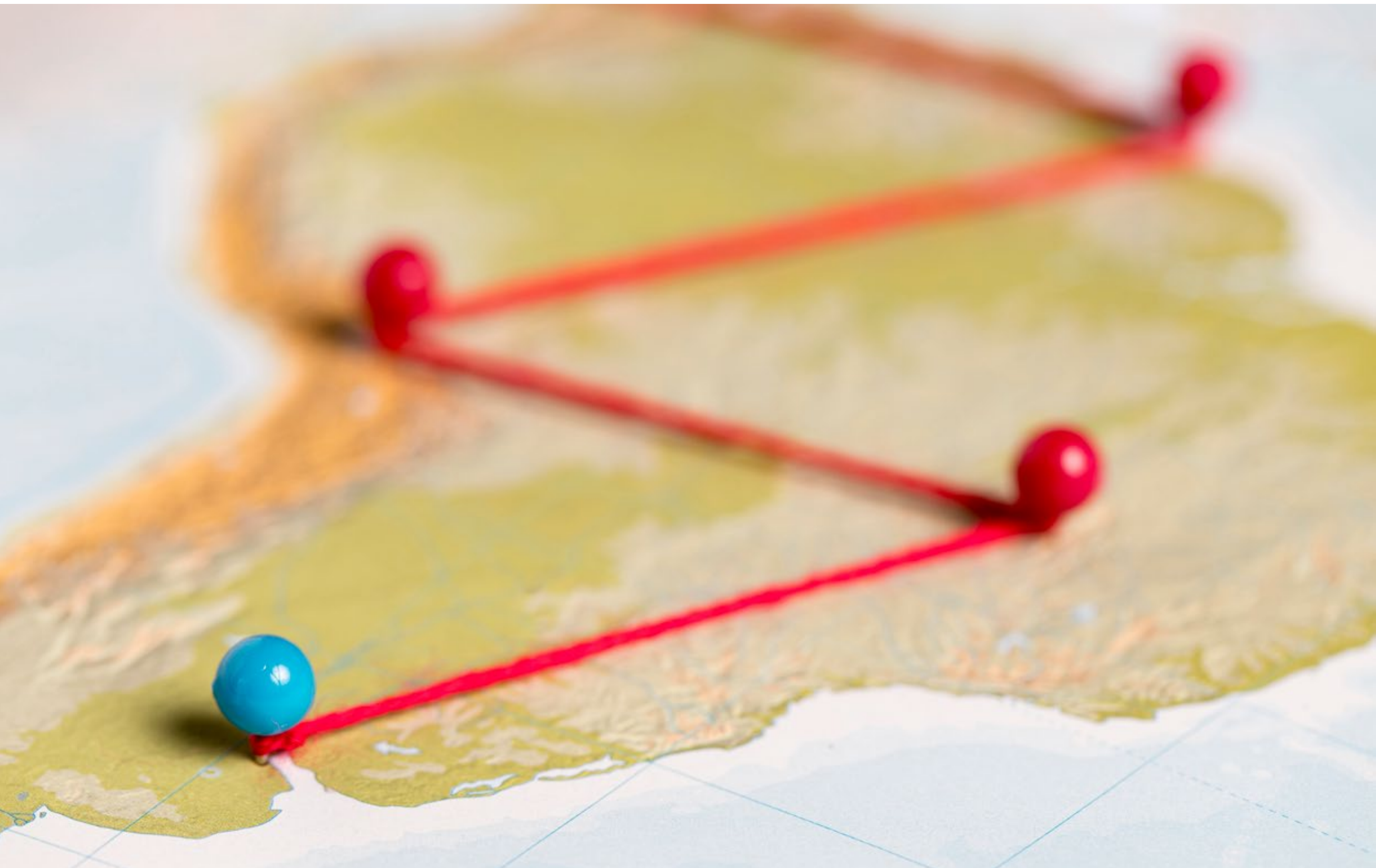
11. Una empresa de análisis financiero utiliza un modelo para evaluar el riesgo de una acción basada en su volatilidad. La evaluación del riesgo está dada por $\sqrt{x-5}+\sqrt{15-x} \leq 4$, donde x representa la volatilidad del mercado en porcentaje. Determine el rango de valores de x que aseguran que el riesgo está dentro de límites aceptables.

Respuestas en la página 243

Capítulo 10

Valor absoluto

Figura 27.
Para la distancia entre puntos se utiliza el valor absoluto



Nota. Tomado de Concepto comunicación pines mapas, Freepik, 2024, https://goo.su/EYxr1

El valor absoluto es una herramienta matemática fundamental que tiene sus orígenes en la necesidad de cuantificar y comparar magnitudes de manera coherente. Antes de la introducción del valor absoluto, la representación de cantidades negativas generaba confusión, ya que, restaban en lugar de sumar. El valor absoluto surge, entonces, como una forma de medir distancias en la recta numérica, siempre en sentido positivo, independientemente del signo del número.

Esta sencilla pero poderosa noción es crucial en áreas como finanzas, economía y administración, que requieren comparar y operar con valores que pueden ser positivos o negativos. El valor absoluto permite calcular, por ejemplo, variaciones de precios, rendimientos de inversiones o desviaciones de presupuestos, sin confusiones por el signo. De esta manera, el valor absoluto se convierte en una herramienta indispensable para el análisis cuantitativo en carreras administrativas.

Piense, por ejemplo, en las distancias que se presentan a lo largo de la vida.

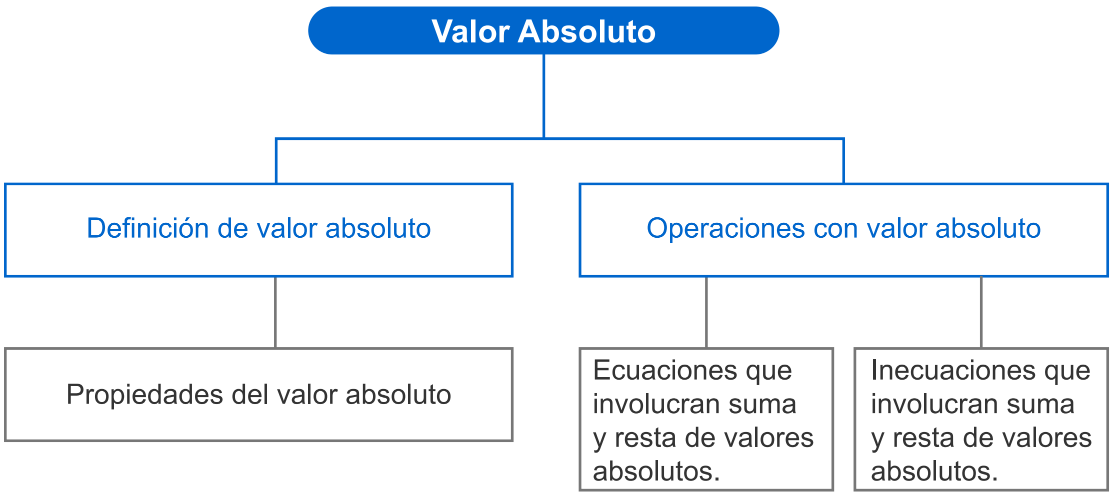
Objetivos de unidad

1. Comprender la definición y propiedades del valor absoluto tanto para la resolución de ecuaciones como inecuaciones.

2. Realizar operaciones que involucren el valor absoluto, teniendo en cuenta la definición y propiedades del valor absoluto, para la obtención del conjunto solución de la ecuación o inecuación planteada.

3. Resolver problemas, aplicando la idea del valor absoluto.

Figura 28.
Temas a trabajar.



Valor Absoluto

De manera formal, el valor absoluto de un número real se define a continuación:

Sea x un número real cualquiera, el valor absoluto de x que lo notaremos $|x|$, está definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & si\ x \geq 0 \\ -x, & si\ x < 0 \end{cases}$$

De la definición se sigue que el valor absoluto de un número es siempre mayor o igual a cero.

Ejemplo

- $\left|\frac{1}{3} - 2\right| = \frac{5}{3}$, $\frac{5}{3}$ es el positivo de $-\frac{5}{3}$.

Teorema 1

Sea $a > 0$, entonces $|x| = a$ si y solo si $x = a$ o $x = -a$

Teorema 2 (propiedades del valor absoluto)

Sean x, y números reales, entonces:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
- $|x - y| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$
- $|-x| = |x|$
- $|xy| = |x||y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, para todo $y \neq 0$
- $|x|^2 = x^2$

- $|ax^2 + bx + c| = ax^2 + bx + c \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - 4ac < 0$
- $\sqrt[n]{x^n} = |x|$, para todo n par
- $|x + y| \leq |x| + |y|$

Teorema 3 (propiedades para la resolución de ecuaciones)

Sean $x, y \in \mathbb{R}$

1. $|x| = y \quad \Rightarrow \quad y \geq 0 \quad y \quad (x = -y \quad ó \quad x = y)$
2. $|x| = |y| \quad \Rightarrow \quad x = -y \quad ó \quad x = y$

Ejercicios resueltos

1. Resuelva la ecuación.

$$|\boldsymbol{x} - \mathbf{5}| = \mathbf{4}$$

Solución

Siguiendo el teorema 3.1, se tiene que $|x| = a \ \Rightarrow \ x = a \text{ o } x = -a$. Esta propiedad se aplica al ejercicio:

$|x - 5| = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x - 5 = 4 \ \text{ ó } \ x - 5 = -4$

De i $x - 5 = 4$, se obtiene $x = 9$ y de i $x - 5 = -4$ se tiene $x = 1$

Luego, el conjunto solución es $\{1,9\}$.

Una forma de comprobar si el resultado obtenido es correcto es reemplazar los valores del conjunto solución en la ecuación con valor absoluto.

Si reemplaza 1 o 9 en la ecuación, obtiene una verdad, es decir al sustituir 1 en $|x - 5| = 4$, obtiene $|1 - 5| = 4 \Rightarrow |-4| = 4 \Rightarrow 4 = 4$. Sucede algo similar si reemplaza 9 en $|x - 5| = 4$, ahora obtiene $|9 - 5| = 4 \Rightarrow |4| = 4 \Rightarrow 4 = 4$.

Observación

De forma similar a la comprobación realizada en el ejemplo del primer ejercicio, se puede proceder en cada una de las ecuaciones e inecuaciones planteadas más adelante.

2. Resuelva la ecuación.

$$\left|\boldsymbol{x^2 - 10}\right| = \boldsymbol{6}$$

Solución

Si se aplica el teorema 1 $|x| = a \;\Rightarrow\; x = a \text{ o } x = -a$, se tiene que

$|x^2 - 10| = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 10 = 6 \;\text{ ó }\; x^2 - 10 = -6$

De la ecuación $x^2 - 10 = 6$, se obtiene $x^2 = 16$ que implica $x = \mp 4$

y de la ecuación $x^2 - 10 = -6$, se tiene $x^2 = 4$ que nos da $x = \mp 2$

Luego se obtiene que el conjunto solución es $\{-2,2,-4,4\}$.

3. Resuelva la ecuación.

$$\left|\boldsymbol{x^2 - 3}\right| = \boldsymbol{x + 9}$$

Solución

Se aplica $|x| = y \;\Rightarrow\; [y \geq 0 \;\; \lambda \;\; (x = -y \;\text{ ó }\; x = y)]$, que es la propiedad del teorema 3.1.

Para nuestro ejemplo se transforma en , para $y \geq 0$, tiene

$x + 9 \geq 0 \;\Rightarrow x \geq -9$ y además para $x = y \;\text{ ó }\; x = -y$, tiene que:

$$\begin{array}{c} x^2 - 3 = x + 9 \quad \text{ó} \\ x^2 - 3 = -(x + 9) \end{array}$$

y cuando se resuelve se tiene que:

$$\begin{cases} x^2 - 3 = x + 9 \;\Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \;\Rightarrow (x-4)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 4 \; y \; x = -3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{ó} \\ x^2 - 3 = -(x + 9) \;\Rightarrow\; x^2 - 3 + x + 9 = 0 \Rightarrow \; x^2 + x + 6 = 0 \; que \; no \; es \; factorable \end{cases}$$

Por tanto, se considera $x_1 = 4$ y $x_2 = -3$ como opciones para soluciones.

Puesto que $x \geq -9$, los valores $x_1 = 4$ y $x_2 = -3$ se encuentran en el intervalo $[-9, \infty[$ y luego el conjunto solución de la ecuación es $\{-3,4\}$.

4. Resuelva la ecuación.

$$\left|x^2-5\right| = x-1$$

Solución

Utilice una vez más la propiedad 1 del teorema 3

$|x| = y \quad \Rightarrow \quad [y \geq 0 \quad \lambda \quad (x = -y \quad ó \quad x = y)]$

Para el ejemplo, se tiene que:

$x - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 1$, además

$$\begin{cases} x^2 - 5 = x - 1 \Rightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+16}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}\ y\ x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \quad ó \\ x^2 - 5 = -(x-1) \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x_3 = -3\ y\ x_4 = 2 \end{cases}$$

Puesto que $x \geq 1$, se debe intersecar las soluciones con el intervalo $[1, \infty[$. Es por ello que de las cuatro soluciones encontradas, el conjunto solución solo está formado por los valores positivos y es $\left\{2, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

5. Resuelva la ecuación.

$$|\ 2x^2 - 3x - 6\ | = |\ x^2 - 2x\ |$$

Solución:

Utilice la propiedad $|x| = |y| \quad \Rightarrow \quad x = -y \quad ó \quad x = y$, que para el ejemplo se transforma en:

$$2x^2 - 3x - 6 = -(x^2 - 2x) \quad ó \quad 2x^2 - 3x - 6 = (x^2 - 2x).$$

Al desarrollar cada ecuación, se obtiene que:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 6 = -(x^2 - 2x) \Rightarrow 3x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25+72}}{6} \\ \Rightarrow x_1 = \frac{5+\sqrt{97}}{6}\ y\ x_2 = \frac{5-\sqrt{97}}{6} \\ ó \quad 2x^2 - 3x - 6 = (x^2 - 2x) \Rightarrow 3x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \\ \Rightarrow x = 3\ y\ x = -2 \end{cases}$$

Luego, el conjunto solución es $\left\{\frac{5-\sqrt{97}}{6}, -2, 3, \frac{5+\sqrt{97}}{6}\right\}$.

6. Determine el conjunto solución de la ecuación:

$$\mathbf{|-2x+3|+|-4+x|=9}$$

Solución

Se define los valores absolutos

$$|-2x+3| = \begin{cases} -2x+3, & \text{si } x \leq \frac{3}{2} \\ 2x-3, & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

y

$$|-4+x| = \begin{cases} -4+x, & \text{si } x \geq 4 \\ 4-x, & \text{si } x < 4 \end{cases}.$$

Se tiene cuatro posibles formas de combinar:

$$\begin{cases} (-2x+3)+(-4+x)=9 \\ x \leq \dfrac{3}{2}\ ,\ \ x \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-1=9 \\ x \leq \dfrac{3}{2}\ ,\ \ x \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-10 \\ x \leq \dfrac{3}{2}\ ,\ \ x \geq 4 \end{cases}$$

Con la intersección de las soluciones, se obtiene la solución $S_1 = \emptyset$

$$\begin{cases} (-2x+3)+(4-x)=9 \\ x \leq \dfrac{3}{2}\ ,\ \ x < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+7=9 \\ x \leq \dfrac{3}{2}\ ,\ \ x < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{2}{3} \\ x \leq \dfrac{3}{2}\ ,\ \ x < 4 \end{cases}$$

Con la intersección de las soluciones, se obtiene la solución $S_2 = -\frac{2}{3}$

$$\begin{cases} (2x-3)+(-4+x)=9 \\ x > \dfrac{3}{2}\ ,\ \ x \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-7=9 \\ x > \dfrac{3}{2}\ ,\ \ x \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{16}{3} \\ x > \dfrac{3}{2}\ ,\ \ x \geq 4 \end{cases}$$

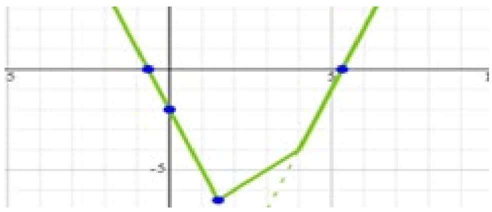
Con la intersección de las soluciones, se obtiene la solución $S_3 = \emptyset$

$$\begin{cases} (2\mathrm{x}-3)+(4-\mathrm{x})=9 \\ \mathrm{x}>\dfrac{3}{2}\,,\ \ \mathrm{x}<4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}+1=9 \\ \mathrm{x}>\dfrac{3}{2}\,,\ \ \mathrm{x}<4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}=8 \\ \mathrm{x}>\dfrac{3}{2}\,,\ \ \mathrm{x}<4 \end{cases}$$

Con la intersección de las soluciones, se obtiene la solución $S_4 = \mathrm{x} = \frac{16}{3}$

El conjunto solución de la ecuación es$\left\{-\frac{2}{3},\frac{16}{3}\right\}$

Figura 29.



Nota. Tomada de Calculadora de ecuaciones con valor absoluto, 2024, Symbolab, https://goo.su/A99XmK

Ejercicios propuestos

Determine el valor absoluto de las siguientes expresiones:

1. $\left|-5+\frac{1}{3}\right|$
2. $|x-7|=5$
3. $5|x-7|+2=12$
4. $4|x-9|+10=3$
5. $|x^2-20|=16$
6. $|2x^2-3|=x+3$
7. $|2x^2-3|=x-3$
8. $|5x-1|=|2x+3|$
9. $|7x-3|=|3x+7|$
10. $|3x^2-x-6|=|2x^2+6|$
11. $|5-2x|-|6-x|=8$

Inecuaciones con valor absoluto

Para la resolución de inecuaciones con valor absoluto se emplea el siguiente teorema.

Teorema 4. (propiedades para la resolución de inecuaciones con valor absoluto)

Sean $x, y \in \mathbb{R}$

1. $|x| < y \Rightarrow [y \geq 0 \quad y \quad (-y < x < y)]$
2. $|x| \leq y \Rightarrow [y \geq 0 \quad y \quad (-y \leq x \leq y)]$
3. $|x| > y \Rightarrow [x < -y \quad ó \quad x > y]$
4. $|x| \geq y \Rightarrow [x \leq -y \quad ó \quad x \geq y]$

Interdisciplinariedad

En el siguiente enlace encuentre la importancia del valor absoluto al analizar las desigualdades:

https://n9.cl/b75f9

1. Resuelva la siguiente inecuación.

$$|\boldsymbol{x}-\mathbf{5}| \leq \mathbf{10}$$

Solución

Aplique la propiedad $|x| \leq y \Rightarrow [\, y \geq 0 \; y \; (-y \leq x \leq y)]$.

Para el ejemplo, se tiene que: $10 \geq 0$
y además que: $-10 \leq x-5 \leq 10$

$$\Rightarrow -10+5 \leq x-5+5 \leq 10+5$$

$$\Rightarrow -5 \leq x \leq 15$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $[-5, 15]$

2. El precio ideal de un producto que se fabrica en una industria es de 50 dólares. Si el precio puede variar del precio ideal en 0.5 dólares, ¿qué gama de precios será aceptable sin que el producto esté fuera de lo presupuestado?

Solución

Se plantea la resolución del problema de la siguiente manera: el precio que puede variar menos el precio ideal 50 dólares es menor que $0,5$ dólares, es decir que se tiene la inecuación:

$|x - 50| < 0,5,$

cuya solución es $-0,5 \leq x - 50 \leq 0,5$

$\Rightarrow 49.5 \leq x \leq 50.5$

Por lo tanto, la gama de precios aceptable estará en $[49.5 \text{ dólares}, 50 \text{ dólares}]$

3. Resuelva la siguiente inecuación.

$$|\mathbf{4x + 5}| \leq \mathbf{2x - 3}$$

Solución

Utilice la propiedad $|x| \leq y \Rightarrow [y \geq 0 \; y \; (-y \leq x \leq y)]$, que se transforma en: $2x - 3 \geq 0 \;\; y \; (-(2x - 3) \leq 4x + 5 \leq 2x - 3\,)$

De $2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow x\epsilon \left[\frac{3}{2}, \infty\right[$ Y de $-(2x - 3) \leq 4x + 5 \leq 2x - 3$, se obtiene:

$$\begin{cases} 4x + 5 \leq 2x - 3 \\ -(2x - 3) \leq 4x + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \leq -8 \\ 6x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -4 \\ x \geq -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\epsilon\,]-\infty, -4] \\ x\epsilon \left[-\dfrac{1}{3}, \infty\right[\end{cases}$$

Cuando intersecan los intervalos $\left[\frac{3}{2}, \infty\right[$, $]-\infty, -4]$ y $\left[-\frac{1}{3}, \infty\right[$, la intersección es el conjunto vacío y la inecuación no tiene solución.

4. Resuelva la inecuación.

$$|5x - 3| \leq 1 - x$$

Solución

Use la propiedad $[y \geq 0 \; y \; (-y \; \leq \; x \; \leq \; y)]$, que para el ejemplo, se transforma en: $1 - x \geq 0 \; y \; -(1 - x) \leq 5x - 3 \leq 1 - x$

De $1 - x \geq 0 \; \Rightarrow 1 \geq x \; \Rightarrow x \in \left]-\infty, 1\right]$

y de $-(1 - x) \leq 5x - 3 \leq 1 - x$, se obtiene:

$$\begin{cases} 5x - 3 \geq \; -(1 - x) \Rightarrow 4x \geq \; 2 \; \Rightarrow x \; \geq \; \frac{1}{2} \; \Rightarrow x \; \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right[\\ \; 5x - 3 \leq 1 - x \Rightarrow 6x \leq 4 \; \Rightarrow x \; \leq \; \frac{2}{3} \; \Rightarrow x \; \in \; \left]-\infty, \frac{2}{3}\right] \end{cases}$$

Puesto que se define la intersección de los intervalos como:

$\left[\frac{1}{2}, \infty\right[\; \cap \; \left]-\infty, \frac{2}{3}\right] \; \cap \; \left]-\infty, 1\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$, el conjunto solución es $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$.

Ciudadanía digital

En el siguiente enlace encuentre la solución a la ecuación:

$$|x^2 - 5| = x - 1$$

https://goo.su/EizV7cD

5. Resuelva la siguiente inecuación.

$$|2x - 11| < |x - 5|$$

Solución

Recuerde que $|x| < \; |y| \; \Leftrightarrow \begin{cases} si \; y \geq 0 \; y \; (-y < x < y) \\ si \; y < 0 \; y \; (-y > x > y) \end{cases}$

Así se tiene para el caso 1, si $x - 5 \geq 0$, es decir si $x \geq 5$, entonces:

$$\begin{cases} 2x - 11 < x - 5 \; \Rightarrow \; x < 6 \\ -(x - 5) \leq 2x - 11 \Rightarrow 3x > 16 \; \Rightarrow \; \dfrac{16}{3} < x \end{cases}$$

Como $\frac{16}{3} < x < 6$ esto implica que $x \in \left]\frac{16}{3}, 6\right[$ y puesto que $x \in [5, \infty]$, la intersección $\left]\frac{16}{3}, 6\right[\; \cap \; [5, \infty[= \left]\frac{16}{3}, 6\right[$ es el conjunto solución de la inecuación para el caso 1.

Para el caso 2, si $x-5<0$, se tiene $x<5$, entonces:

$$\begin{cases} 2x-11>x-5 \Rightarrow x>6 \\ -(x-5)\geq 2x-11 \Rightarrow 3x<16 \Rightarrow \dfrac{16}{3}>x \end{cases}$$

La intersección es $]-\infty,5[\cap\left]-\infty,\frac{16}{3}\right[\cap]6,\infty[=\emptyset$. Dado que, el conjunto solución es la unión de las soluciones de los dos casos, se tiene que:

$$\left]\frac{16}{3},6\right[\cup\emptyset=\left]\frac{16}{3},6\right[$$

6. Determine el conjunto solución de la inecuación.

$$|\boldsymbol{x}+\mathbf{3}|+|\boldsymbol{x}-\mathbf{2}|\leq\mathbf{12} \qquad \mathbf{E_2}$$

Solución

Definimos los valores absolutos:

$$|x+3|=\begin{cases} x+3, & si\ x\geq -3 \\ -x-3, & si\ x<-3 \end{cases}$$

y

$$|x-2|=\begin{cases} x-2, & si\ x\geq 2 \\ -x+2, & si\ x<2 \end{cases}.$$

Se cuenta con cuatro posibles formas de combinar:

$$\begin{cases} (x+3)+(x-2)\leq 12 \\ x\geq -3\,,\ x\geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1\leq 12 \\ x\geq -3\,,\ x\geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leq\dfrac{11}{2} \\ x\geq -3\,,\ x\geq 2 \end{cases}$$

Con la intersección de las soluciones, se obtiene la solución $S_1=\left[2,\frac{11}{2}\right]$.

$$\begin{cases} (x+3)+(-x+2)\leq 12 \\ x\geq -3\,,\ x<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3-x+2\leq 12 \\ x\geq -3\,,\ x<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\leq 12 \\ x\geq -3\,,\ x<2 \end{cases}$$

Con la intersección de las soluciones, se obtiene la solución $S_2 = [-3,2]$.

$$\begin{cases} -x-3+(x-2) \leq 12 \\ x<-3\,,\; x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-3+x-2 \leq 12 \\ x<-3\,,\; x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 \leq 12 \\ x<-3\,,\; x \geq 2 \end{cases}$$

Con la intersección de las soluciones, se obtiene la solución $S_3 = \emptyset$.

$$\begin{cases} -x-3+(-x+2) \leq 12 \\ x<-3\,,\; x<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-1 \leq 12 \\ x<-3\,,\; x<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{13}{2} \\ x<-3\,,\; x<2 \end{cases}$$

Con la intersección de las soluciones, se obtiene la solución $S_4 = \left[-\frac{13}{2},-3\right]$.

La solución es la unión de las soluciones:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left[-\frac{13}{2},-3\right] \cup [-3,2] \cup \left[2,\frac{11}{2}\right] = \left[-\frac{13}{2},\frac{11}{2}\right]$$

Ejercicios propuestos

Determine el valor absoluto de las siguientes inecuaciones.

1. $|5x-6| \leq 4$
2. $|2x-1| < 5$
3. $|4x-5| \leq 2$
4. $|3x-2| \geq 4$
5. $|3x+4| > 3$
6. $|2x-3| \leq x+4$
7. $|3x-7| \leq x-2$
8. $|3x-8| > 2x-11$
9. $|4x-3| \leq |x+5|$
10. El precio ideal de un producto que se fabrica en una industria es de 70 dólares. Si el precio puede variar del precio ideal en $0{,}055$ dólares, ¿qué gama de precios será aceptable sin que el producto quede fuera de lo presupuestado?

Respuestas en la página 244

Respuestas

Capítulo 01

Tema 01

a. F
b. V
c. F
d. no es proposición
e. V

Ejercicio 02

a. contradicción
b. tautología
c. contingencia
d. tautología
e. contradicción

Tema 02

a. $\neg p \vee q$

b. $\neg q$

c. $q \vee \neg p$

d. $\neg p$

e. q

Tema 03

Ejercicio 01

a.

4. $\neg\, q \quad MTT\ (1)\ y\ (3)$
5. $r \quad MPP\ (2)\ y\ (4)$

b.

2. $p \quad Simplificación$
3. $q \quad MPP\ (3)\ y\ (2)$

c.

5. $\neg\, q \quad MTT\ (3)\ y\ (4)$
6. $t \quad MPP(5)\ y\ (2)$
7. $\neg s \quad MTP.(6)\ y\ (1)$

Ejercicio 02

a. $R = \exists\, x \in \mathbb{N}, \exists\, x \in \mathbb{N};\ p(x) \vee q(x)$
$\neg\, R = \forall\, x \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{N}; \neg[p(x) \vee q(x)]$

b. $K = \{^{x}/_{x} \epsilon\ Quiteños\} \quad C = \{^{y}/_{y} \epsilon\ Cuencanos\}$
$Q = \exists\, x \in K, \forall y \in C; p(x) \vee \neg q(y)$
$\neg Q = \forall\, x \in K, \exists Y \in C; \neg[p(x) \vee \neg q(y)]$

c. $L = \{^{x}/_{x} \epsilon\ Liguistas\} \quad B = \{^{y}/_{y} \epsilon\ Barcelonistas\}$
$S = \forall\, x \in L, \exists y \in B; p(x) \leftrightarrow q(y)$
$\neg S = \exists\, x \in L, y \in \forall B; \neg[p(x) \leftrightarrow q(y)]$

Ejercicio 03

a. Verdad.
b. Verdad.
c. Falso.

Capítulo 02

Tema 01

1. $(\boldsymbol{R}\text{: } \boldsymbol{G})$Finito, $\boldsymbol{H})$ Infinito)
2. $(\boldsymbol{R}\text{: } \boldsymbol{X})$ Finito unitario, $\boldsymbol{Y})$ Finito vacío, $\boldsymbol{Z})$ Infinito)
3. $(\boldsymbol{R}\text{: } \boldsymbol{b})$ B es un conjunto infinito y vacío)
4. $(\boldsymbol{R}\text{: } A = 7, B = 3, C = 5\ )$
5. $(\boldsymbol{R}\text{: }$ No es posible establecer una correspondecia)
6. $\boldsymbol{R}\text{: } C - A - B - D$

Tema 02

1. $(\boldsymbol{R}\text{: } \boldsymbol{a}), F\ \boldsymbol{b})$ V, $\boldsymbol{c})$ F, $\boldsymbol{d})$ F)
2. $(\boldsymbol{R}\text{: } \boldsymbol{a}), F\ \boldsymbol{b})$ V, $\boldsymbol{c})$ F, $\boldsymbol{d})$ V)

Tema 03

1. $(\boldsymbol{R}\text{: } A \cup B = \{2,3,4,7,8,9\}\ )$
2. $(\boldsymbol{R}\text{: } \boldsymbol{a})\ L - M = \{2,3,4,5\}\ y\ \boldsymbol{b})\ M - L = \{-1,0\})$
3. $(\boldsymbol{R}\text{: } J\ \Delta\ K = \{\ 3,4,5,6,8,9\}\ \ )$
4. $(\boldsymbol{R}\text{: }$ Opción **d**)
5. $(\boldsymbol{R}\text{: }$Opción **b**))
6. $(\boldsymbol{R}\text{: } \mathbf{32}))$

Tema 04

1. $(\boldsymbol{R}\text{: } A \cap B)$
2. $(\boldsymbol{R}\text{: } A)$
3. $R.A \cup B^C$
4. $(\boldsymbol{R}\text{: } A^C\ \Delta\ B^C)$
5. $(\boldsymbol{R}\text{: }$Opción **d**))

Tema 05

1. $(\boldsymbol{R}\text{: } \{17\})$
2. $(\boldsymbol{R}\text{: } \{A \cup B = 140\})$
3. $(\boldsymbol{R}\text{: } A \cup B \cup C = \{95\})$
4. $(\boldsymbol{R}\text{: } \{16\})$
5. $(\boldsymbol{R}\text{: } \{16\})$
6. $(\boldsymbol{R}\text{: } \{11\})$
7. $(\boldsymbol{R}\text{: } \{12\})$
8. $(\boldsymbol{R}\text{: } \{21\})$
9. $(\boldsymbol{R}\text{: } \{24\})$
10. $(\boldsymbol{R}\text{: } \{31\})$
11. $(\boldsymbol{R}\text{: } \{8\})$

Capítulo 03

Tema 01

1. 2. 3.

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}'$	$\mathbb{R}$
-3		X	X		X
e				X	X
$\sqrt{2}$				X	X
0	X	X	X		X
$\sqrt{25}$	X	X	X		X

4.

#	Operación	#	Justificación
1	$\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{10-6}{15}$	3	Ley de signos de la multiplicación y simplificación a fracción equivalente
2	$3+5-6=2$	6	Ley distributiva, realización de multiplicaciones, suma algebraica y opuesto multiplicativo
3	$-2\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{3}$	5	Realización de sumas algebraicas, neutro multiplicativo y ley de signos de la multiplicación
4	$2-3+1=0$	1	Obtención del MCM y de fracciones homogéneas
5	$\left(\frac{2}{3}+2\frac{1}{3}-4\right)\left(\frac{4}{7}\right)=(3-4)\left(\frac{4}{7}\right)=-\frac{4}{7}$	2	Realización de sumas algebraicas
6	$2\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{5}{4}-\frac{2}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right)=1$	4	Realización de sumas algebraicas y opuesto aditivo

Tema 02

2. $1\frac{14}{31}$

3. $1\,\frac{14}{31}\,e$

4. $-14\,\frac{787}{2080}$

5. $\frac{1}{2}$

6. $\frac{29}{6}$

7. $\frac{2612259}{11481800}$

8. $10887{,}02908$

9. $\frac{11\ \text{x}2\ \text{x}3\ \text{x}5\text{x}37}{205\times 28901}$

10. $1+\frac{1}{\pi^2}+\frac{8}{\pi^3}$

Capítulo 04

Tema 01

1.

Expresión	Ordenado ascendente	Ordenado descendente	Completo	Incompleto
$4x - 3$		X	X	
$5x^5$				X
$-3x^2 + 5$		X		X
$-6 + 2x + ex^2 - 4x^3$	X		X	
$x^4 + \pi x - 2$		X		X

2.

#	Operación	#	Descripción
1	$3x^2 - 2x + 3$	5	Cúbica, ascendente y completa.
2	$-6 + 4x^2 - 5x^3$	1	Cuadrática, descendente y completa.
3	$-2 + \frac{5}{3}x^2$	4	Lineal e incompleta.
4	$3{,}2\ x$	6	Lineal, ascendente y completa.
5	$2 - 3x + x^2 + \pi x^3$	2	Cúbica, ascendente e incompleta.
6	$1 - 4x$	3	Cuadrática, ascendente e incompleta.

3.

a. $Q(x) = K(x) \quad y \quad R(x) = M(x)/K(x)$
b. $Q(x) = K(x) \quad y \quad R(x) = M(x)/L(x)$
c. $Q(x) = \frac{41}{4}x + \frac{123}{10} \quad y \quad R(x) = -\frac{2091}{100}x^2 + \frac{101}{10}x + \frac{369}{5}$
d. $Q(x) = -\frac{41}{9}x - \frac{205}{54} \quad y \quad R(x) = -\frac{943}{216}x^2 - \frac{494}{27}x + \frac{1025}{324}$
e. $Q(x) = -\frac{6}{41}x^2 + \frac{61}{205}x \quad y \quad R(x) = \frac{109916}{41}x^3 - \frac{12118}{1230}x - 5$

Tema 02

1.

a. $4(x+1)(x+4)$
b. $(2x-3)^2(3x-2)$
c. $(x-1)(x-3)(x+2)$
d. $(x-0{,}2476)(x-2{,}432)(x-3{,}3203)$

2.

a. $\frac{x}{x^2+1}$
b. $x^2y^4(25x^2y^2+35xy+49)$

3. $MCM: (2x-3)^2(3x-4)(x-2)\ \ y\ \ MCD: (x-2)$

4. $3240x^3r^7$

5. $(2x-3\mathrm{y})^8$

6. $(10\,;35)$

7. $(0{,}17\,;2{,}2125)\,;\ (1{,}09\,;3{,}3625)\,;\ (10{,}74\,;15{,}425)$

8. $(0{,}25\,;2{,}375)\,;\ (2{,}43\,;5{,}645)\,;\ (3{,}32\,;6{,}98)$

9.

A. $f(0)=18$
B. $0{,}667\,;\ 1{,}5\ y\ 3$
C. $f(x)>0\ para\ x\ \in [\,0\,;0{,}667\,[\ U\ ]1{,}5\,;\ 3[$
D. $]\,1{,}5\,;\ 3[\ y\ ]\,0{,}667\,;1{,}5\,[$

10.

A. $0{,}67\ y\ 1{,}5$ miles de productos
B. $f(x)>0\ para\ x\ \in [\,0{,}67\,;1{,}5\,[\ U\ ]1{,}5\,;\ +\infty[$

Capítulo 05

Tema 01

1. $(R: 6x^7y^5z^4)$

Tema 02

1. $\frac{z+w}{x}$
2. $\frac{a+b}{a-b}$
3. $-2x+3$
4. $\frac{1-x}{x+1}$
5. $\frac{y+x}{y}$
6. $\frac{x+3}{x+2}$

Tema 03

1. $-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+4}$
2. $\frac{6}{x+1}+\frac{-5}{x+2}$
3. $\frac{7}{2(x+1)}-\frac{5}{2(x-1)}$
4. $\frac{11}{4(x+1)}+\frac{17}{4(x+5)}$
5. $\frac{5}{(x+2)}+\frac{5}{(x+2)^2}$
6. $\frac{5}{(x+3)}-\frac{2}{(x-1)}$

Tema 04

1. $F=4\sqrt{2}-5$
2. $M=\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1}{2}$
3. $A=\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}$
4. $P=\frac{2a+\sqrt{ax}-x}{4a-x}$
5. $Q=\frac{x+4+2\sqrt{2x+4}}{x}$
6. $B=\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{xy}-8\sqrt[3]{y^2}}{x-8y}$
7. $T=\frac{4\sqrt{3}}{3}$
8. $W=\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$
9. $Q=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}$

Capítulo 06

Tema 01

1. $m = -1, b = 21$
2. $m = 1, b = -5$
3. $m = -2, b = 9$
4. $m = 3, b = 1$
5. $m = -\frac{2}{3}, b = \frac{5}{3}$
6. $m = \frac{3}{2}, b = -7$
7. $m = -\frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$
8. $m = 3, b = 2$
9. $m = 2, b = -3$
10. $m = 1, b = -1$

Tema 02

1. $\left(-\frac{3}{4}; \frac{11}{8}\right)$
2. $(3; 4)$
3. $\left(\frac{3}{4}; -\frac{5}{4}\right)$
4. $\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$
5. $\left(\frac{7}{3}; \frac{8}{3}\right)$
6. $\left(\frac{1}{5}; \frac{6}{5}\right)$
7. $(3; -1)$
8. $(0; -3)$
9. $\left(-\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right)$
10. $(3; 2)$

Tema 03

1. $(3; 2)$
2. $(2; 3)$
3. $(5; 2)$
4. $(-2; 5)$
5. $\left(-3; \frac{1}{5}\right)$
6. $(4; -1)$
7. $(-2; 10)$
8. $(5; 2)$
9. $(-2; -5)$
10. $(5; 1)$

Tema 04

1. $(11; 2)$
2. $(3; 12)$
3. $(18; 10)$
4. $(3; 6)$
5. $(3; 11)$
6. $(16; 6)$
7. $(-1; 7)$
8. $(12; 4)$
9. $(9; -2)$
10. $(5; -6)$

Tema 05

1. $(4;-6)$
2. $(14;-2)$
3. $(-2;3)$
4. $(2;-1)$
5. $(-4;5)$
6. $(5;7)$
7. $\left(-\frac{1}{2};6\right)$
8. $\left(\frac{9}{2};7\right)$
9. $(2;-3)$
10. $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)$

Capítulo 07

Tema 01

1.

a. $x_1 = x_2 = -3$
b. $x_1 = 5; x_2 = 3$
c. $x_1 = 7; x_2 = -3$
d. $x_1 = 4; x_2 = -7$
e. $x_1 = -5/2; x_2 = -3$
f. $x_1 = a; x_2 = b$

2.

a. $x_1 = 4;\ x_2 = 2$
b. $x_1 = 2; x_2 = 3$
c. $x_1 = 7; x_2 = -3$

d. $x_1 = 5$; $x_2 = 8/5$
e. $x_1 = 3$; $x_2 = -3$ no satisface la ecuación
f. $x_1 = 3a/2$; $x_2 = -2a/3$ con $a \neq 0$
g. $x_1 = 2a/3$; $x_2 = -3a/5$
h. $x_1 = -3$; $x_2 = 1/2$

Tema 02

1.

a. $X_1 = 4$; $X_2 = -7$

b. $x_1 = \frac{5+\sqrt{5}i}{2}; \; x_2 = \frac{5-\sqrt{5}i}{2}$

c. $x_1 = 4+\sqrt{5}; \; x_2 = 4-\sqrt{5}$

d. $x_1 = 3; \; x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

e. $x_1 = \frac{a+b+c}{2}; \; x_2 = \frac{a+b-c}{2}$

f. $X_1 = 0$; $X_2 = -5$

g. $x_1 = \frac{3}{2}; \; x_2 = -\frac{1}{2}$

h. $x_1 = \frac{9}{2}; \; x_2 = \frac{1}{2}$

i. $X_1 = -9$; $X_2 = 3$

j. $x_1 = \frac{1}{3}; \; x_2 = \frac{1}{9}$

k. $x_1 = a+b; \; x_2 = a-b$

l. $x_1 = \frac{4+2i}{5}; \; x_2 = \frac{4-2i}{5}$

Tema 03

1.

a. $x_1 = -5$; $x_2 = -4$; $x_3 = 1$ y $x_4 = 2$.

b. $x_1 = \frac{b}{c}$; $x_2 = -\frac{b}{c}$; $x_3 = \frac{a}{c}i$; $x_4 = -\frac{a}{c}i$

c. $x_1 = -3$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$ y $x_4 = 1$.

d. $x_1 = x_2 = 1$; $x_3 = 2$ y $x_4 = 1/2$.

e. $x_1 = \frac{-5}{3}$; $x_2 = -\frac{7}{3}$; $x_3 = -2+\sqrt{2}i$; $x_4 = -2-\sqrt{2}i$

f. $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -3$ y $x_4 = -4$.

2.

a. $x = 2a$

b. $x_1 = 7$; $x_2 = -1$

c. $x_1 = \frac{9}{13}$; $x_2 = \frac{4}{13}$

d. $x_1 = 2$; $x_2 = -1$

e. $x_1 = 4^n$; $x_2 = \frac{1}{4^n}$

Tema 04

1.

a. $x = 2$ $y = 7$; $x = -1$ $y = 2$.

b. $x = 2$ $y = 1$; $x = 1$ $y = 2$.

c. $x = 3$ $y = -7$; $x = -3$ $y = 7$.

$x = \frac{-3\sqrt{2}}{2}i$; $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}i$; $y=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

d. $x = \frac{5}{3}$; $y=\frac{2}{3}$; $x = 1$; $y=2$

e. $x = 5$; $y = 4$; $x = 5$; $y = -4$

f. $x = 5$; $y = 2$; $z = 6$; $x = 5$; $y = 6$; $z = 2$

g. $x = 8$; $y = 64$; $x = 64$; $y = 8$

Capítulo 08

Tema 01

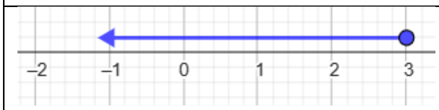
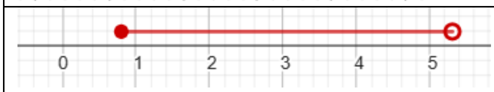
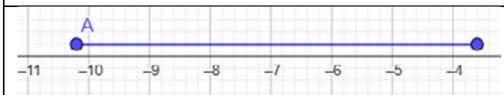
1.

A. $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq -10\}$	**1.** $(-\infty, 3)$	Resp. A3
B. $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 \leq x < 11\}$	**2.** $\left(-\frac{5}{3}, +\infty\right)$	B6
C. $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 3\}$	**3.** $(-\infty, -10]$	C1
D. $\{x \in \mathbb{R} \,/ x \geq 9/2\}$	**4.** $[4.5, +\infty)$	D4
E. $\left\{x \in \mathbb{R} \,/ -2 < x \leq \frac{21}{3}\right\}$	5. 	E5
F. $\{x \in \mathbb{R} \,/ x > -1.\widehat{6}\}$	6. 	F2

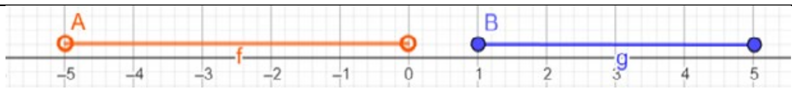
2.

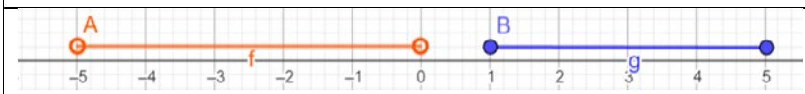
a. $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 \leq x \leq 17\}$
b. $\{x \in \mathbb{R} \,/ 7.9 \leq x \leq 10.1\}$

3.

Gráfica de intervalo	Notación de intervalo	Expresión analítica
	$(-\infty, \sqrt{9}]$	$x \leq 3$
	$[-\frac{4}{5}, 5.3)$	$-\frac{4}{5} \leq x < 5.3$
	$[-10,2; 3.6]$	$-10.2 \leq x \leq 3.6$

4.

A. La intersección de los intervalos es:	Conjunto Solución
	Ø= vacío

B. La intersección de los intervalos es:	Conjunto Solución
	A = (-5,0) ∪ [1,5],

Tema 02

1.

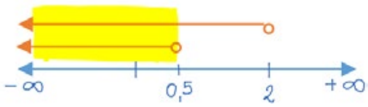
a. si, no, no

b. $x < -2$

2.

$(3t+4) \leq 8$	$t \leq \frac{4}{3}$	$5(m+4) \leq 5m-8$	$\emptyset$
$4x-5 \geq 13+4x$	$\mathbb{R}$	$12(y+2) > -3(2y)-12$	$y > -2$
$-3(x-2) \geq 6(-x+4)$	$x \geq 6$	$\frac{x}{2}-\frac{1}{4} > 2x+\frac{1}{6}$	$x < -\frac{5}{18}$

3.

Sistema de inecuaciones	Solución	Gráfica
$\begin{cases} 5x - 4 \le 2x + 2 \\ 3x - 8 \ge x + 6 \end{cases}$	ø	
$\begin{cases} 9x + x < 5 \\ 1 + 3x < 2x + 3 \end{cases}$	$x < 1/2$	
$\begin{cases} 3x + 1.2 \le x - 5 \\ 5 + x > -2.4 \end{cases}$	$-7.4 < x \le -3.1$	

4. $x \ge 13.19$

5. $G < 800$

6. $3200 < x < 5000$

Capítulo 09

Tema 01

1. $(-\infty,-5)\cup(5,\infty)$
2. $[-6,6]$
3. $[-3,5]$
4. $(-\infty,1]\cup[3,\infty)$
5. $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{2},\infty\right)$
6. $\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2},\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$
7. $\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right)\cup(7,\infty)$
8. $\left(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}\right)\cup(3,\infty)$
9. $(-2,0)\cup\left(0,\frac{1}{3}\right)\cup(2,\infty)$
10. $(-2,\frac{1}{3}]\cup[2,\infty)$
11. $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{10}}{2}\right]\cup[-1,1]\cup\left[\frac{\sqrt{10}}{2},\infty\right)$
12. $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2},-1\right)\cup\left(1,\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$
13. $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup\left(\frac{3}{2},\infty\right)$
14. $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup[-1,1]\cup\left(\frac{3}{2},\infty\right)$
15. $(-\infty,-3]\cup[-1,1]\cup[3,\infty)$
16. $x^2-4\geq 0$
17. $x^2-9<0$
18. La empresa debe producir entre 15 y 60 televisores por día.
19. Una producción entre 0 y 125 millones de libras de camarón no genera ganancias.

Tema 02

1. $(-5,-3) \cup (5,\infty)$
2. $[-5,-3) \cup (5,\infty)$
3. $(-\infty,1) \cup (2,3)$
4. $(-\infty,1) \cup [2,3)$
5. La producción debe ser entre 100 y 500 unidades.

Tema 03

1. $(5,\infty)$
2. $(-4,-3] \cup [1,2)$
3. $(-\infty,-4) \cup (2,\infty)$
4. $(-\infty,-5] \cup [3,\infty)$
5. $\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right]$
6. $(-\infty,-1] \cup \left[1,\frac{5}{3}\right)$
7. $\left[-\frac{19}{8},-2\right)$
8. : $\left[4,\frac{13}{2}\right]$
9. $\left(\frac{21}{4},\infty\right)$
10. $(-\infty,-2] \cup \left(\frac{5}{2},\infty\right)$
11. La volatilidad se encuentra entre el 6% y el 14%

Capítulo 10

Tema 01

1. $\frac{14}{3}$
2. $\{2, 12\}$
3. $\{5, 9\}$
4. sin solución
5. $\{-2, 2. -6, 6\}$
6. $\left\{-\frac{3}{2}. -\frac{1}{2}, 0,\ 2\right\}$
7. $\emptyset$
8. $\left\{-\frac{2}{7}. \frac{4}{3}\right\}$
9. $\left\{-\frac{2}{5}. \frac{5}{2}\right\}$
10. $\left\{-3, 0 . \frac{1}{5}, 4\right\}$
11. $\{-9, ,7\}$

Tema 02

1. $\left[\frac{2}{5}, 2\right]$
2. $]-2,3[$
3. $\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right]$
4. $\left]-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup\ [2,\ \infty[$
5. $\left]-\infty, -\frac{7}{3}\right[\cup \left]-\frac{1}{3}, \infty\right[$
6. $\emptyset$
7. $\left[\frac{9}{4}, \frac{5}{2}\right]$
8. $\left]-\infty, \frac{19}{5}\right] \cup\ [-3,\ \infty[$
9. $\left[-\frac{2}{5}, \frac{8}{3}\right]$
10. $[69.945\ dólares, 70.055\ dólares]$

Bibliografía:

Benalcázar, H. (2015). Fundamentos Matemáticos. Quito: Universidad Central del Ecuador.

Blythe, P., Fensom, J., Forrest, J., & Waldman, P. (2015). Estudios Matemáticos nivel medio. Reino Unido: Oxford.

Castillo, C., Navas, F., & Toro, J. L. (2016). Fundamentos de Matemática. Quito: EPN.

Cohecha, C. (2014). Teorema del binomio y fracciones.[Tesis de doctorado] Universidad Nacional de Colombia https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/52143/01186743.2014.pdf

Espinosa, X. (2012). Manual de Fracciones Parciales. Quito: Editorial Universitaria Abya Yala.

Espinoza Ramos, E. (2003). Álgebra Preuniversitaria Volumen 1. Lima: Servicios Gráficos J.J.

Fernández, X. (2016). Taller de cálculo avanzado: axiomas reales. Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. https://cms.dm.uba.ar/academico/materias/1ercuat2016/taller_de_calculo_avanzado/axiomas_reales.pdf

Galindo, E. (2008). Matemáticas Superiores . Quito: Prociencia Editores.

García Arcos, J. (2023). Serie de Matemáticas Aplicadas Precálculo. SAYO Producciones.
Haeussler, E & Richard, P. (2003). Matemáticas para administración y economía. mexico: Pearson Educación.

Hijuelos A., L. A. (1997). Fundamentos de Cálculo (Primera parte). Bucaramanga: Universidad autónoma de Bucaramanga.

Lara Prado, J. (2014). Análisis Matemático. Quito : Universidad Central del Ecuador.

Lycée d'Adultes. (s.f.). Fiche sur équation et inéquation avec des valeurs absolues. Recuperado el 06 de 05 de 2024, de https://www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/documents/math/math1S/archive1S/01_Fiche_sur_equation_et_inequation_avec_des_valeurs_absolues.pdf

Leithold, L. (1994). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México: Oxford University Press.

Miller, Ch., Heeren, V. & Hornsby, J. . (2004). Matemática: razonamiento y aplicaciones. México: Pearson Educación.

Nápoli, P. (2020). El binomio de Newton. Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA. http://mate.dm.uba.ar/~pdenapo/apuntes-algebraI/2020/2do-cuatrimestre/clase-09-el_binomio_de_Newton.pdf

Navarro, J. (2011). Los secretos del número π, ¿Por qué es imposible la cuadratura del círculo? Navarra: EDITEC.

Rubiños. (2012). Algebra 2012 la enciclopedia. Lima: Ediciones Rubiños.

Silva, J., & Carrasco, P. (2014). Fundamentos de matemática. Quito: Producciones Sayd.

Silva, J., & Carrasco, P. (2017). Algebra. Quito: López.

Spiegel, M. (2007). Algebra superior. México: McGraw Hill Interamericana.

cedia

El sello editorial de la Corporación Ecuatoriana para el Desarrollo de la Investigación y la Academia - CEDIA, nace con la finalidad de apoyar a la creación y la publicación de resultados, investigaciones y procesos académicos, que fomenten el desarrollo de la ciencia y la innovación a nivel nacional e internacional.

cedia

cedia.edu.ec

ISBN: 978-9942-7178-6-3

9 789942 717863